This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

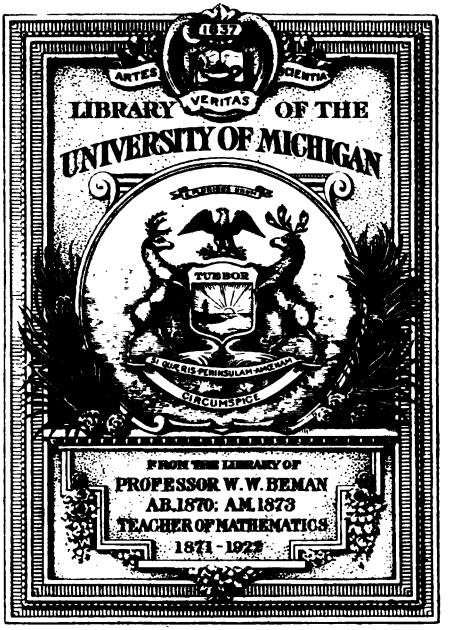
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.


ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUÆRIS PENINSULAM AMŒNAM
CIRCUMSPICE
FROM THE LIBRARY OF
PROFESSOR W. W. BEMAN
A.B. 1870: A.M. 1873
TEACHER OF MATHEMATICS
1871 - 1922

Charles F. Mayer

20 Dec. 1857.

644

QA
35
.P531
G5
1802

Material = 2-452

Ebene Trigonometrie

mit

Anwendungen und Beyträgen

zur

Geschichte derselben.

Pfleiderer, Christoph-Friedrich von, 1736-1821.

Tübingen,
in der J. G. Cotta'schen Buchhandlung.
1802.

W. W. Beman
gt.
6-18-1923

30 Op. 24. EHW

Trigonometrie

Erster Theil.

427501

Vorrede.

Herr Prof. Bohnenberger hat meine zwey in den Jahren 1784. 1785. unter dem Titel: Analysis triangulorum rectilineorum herausgegebene Disputationen, mit einigen Zusäzen und wenigen Aenderungen, übersezt; und Beyspiele und Anwendungen beygefügt. Ich habe die darin kurz berührte literarische Notizen, so weit meine Hülfsmittel reichten, zu vervollständigen gesucht. Herr Prof. Bohnenberger wird die analytische und sphärische Trigonometrie als zweyten Theil beyfügen.

Tübingen, den 14. April 1802.

C. F. Pfleiderer.

Inhaltsanzeige.

	§.	S.
Ebene Trigonometrie.	1—107.	1—213.
Zwek der ebenen-Trigonometrie.	1.	1. f.
Vorbereitung zur Erreichung dieses Zweks.	2—17.	2—56.
Grundlage der trigonometrischen Calculs.	2. ff.	2. ff.
Chordentafeln und ihr Gebrauch	7. ff.	7. ff.
Ptolemäische Chordentafel	8. 16.	9. 20.
Sinus (schlechtweg, oder Sinus recti, im Gegensaz von versi,) und ihr Gebrauch	10. ff.	11. ff.
Einführung der Sinus in den trigonometrischen Calcul, statt der Chorden; und Vortheile dieser Aenderung	14.	14. ff.
Sinus stumpfer Winkel, des rechten Winkels, Sinus totus	14. ff.	19. f.
Sinustafeln und ihre Vervollkommenung durch Peurbach, Regiomontan u. s. w.	16.	20. ff.
Logarithmen; verschiede Arten derselben; ihr Gebrauch	17.	38. ff.
Tafeln der Logarithmen der natürlichen Zahlen	17.	45. ff.
Berechnung der ebenen Dreyeke aus den §. 1. angegebenen Bestimmungsstücken.	18—107.	56—213.
Erster Hauptfall: Wenn eine Seite und zwey Winkel des Dreyeks gegeben sind.	18—23.	56—64.

	§.	S.
Zweyter Hauptfall: Wenn zwey Seiten des Dreyeks gegeben sind, und ein Winkel, welcher einer der gegebenen Seiten gegenüber liegt.	24—28.	64—72.
Dritter Hauptfall: Wenn die drey Seiten des Dreyeks gegeben sind.	29—58.	72—124.
Besondere Fälle desselben:		
I. Wenn die drey Seiten gleich sind	29.	72. f.
II. Wenn zwey der gegebenen Seiten gleich sind	30. ff.	73. ff.
Hiebey Cosinus spizer Winkel	31.	73. f.
Anwendung auf den besondern Fall des zweyten Hauptfalls: wenn die zwey gegebene Seiten wenig von einander unterschieden sind, und der gegebene einer derselben gegenüberliegende Winkel ein rechter ist	33.	76. ff.
III. Wenn die drey Seiten ungleich sind.	34—58.	78—124.
1te Auflösungsart mittelst der Sätze El. I. 47. II. 12. 13. und ihrer Conversen	34—37.	78—89.
2te Berechnungsart, besonders der spizen Winkel des Dreyeks, blos mittelst El. II. 13. oder eines aus El. III. 36. IV. 16. folgenden Satzes	38. f.	89—95.
3o. Allgemeiner Ausdruk der Cosinus der spizen Winkel eines ungleichseitigen Dreyeks durch seine drey Seiten	40.	95.
Beurtheilung nach dieser Regel: ob der Winkel, auf dessen Berechnung sie angewendet wird, spiz sey, oder nicht?	41.	95. f.

	§.	S.
Anzeige derselben, und Bedeutung von Cosinus, wenn dieser Winkel ein rechter ist	41.	95.
Negatives Resultat der Formel für einen stumpfen Winkel; Bedeutung und Bezeichnung der Cosinus stumpfer Winkel	42. ff.	96. ff.
Allgemeine gegenseitige Beziehung des Sinus und Cosinus eines Winkels	43.	101.
Ursprung der Benennung Cosinus	31. 43.	73. f. 101.
Andere Benennung desselben	43.	101. ff.
Allgemeine Gültigkeit des Ausdruks §. 40. für die Cosinus der Winkel eines ungleichseitigen Dreyeks, dessen drey Seiten gegeben sind	45.	104.
Zwey zur Berechnung in gewissen Fällen bequemere Umgestaltungen desselben	46. f.	104. ff.
4°. Andere Berechnungsart der Fläche und der Sinus der Winkel eines ungleichseitigen Dreyeks aus seinen drey Seiten	48. f. 56.	108. ff. 118. f.
Allgemeine Ausdrüke der Fläche, Höhen, Sinus der Winkel eines solchen Dreyeks durch seine Seiten	50—54.	111—115.
5. Regeln für Berechnung der Sinus und Cosinus der Hälften der Winkel eines ungleichseitigen Dreyeks aus seinen Seiten	55. f.	115—121.
Allgemeine Ausdrüke des Sinus und des Cosinus der Hälfte eines Winkels durch den Cosinus des ganzen Winkels	57.	121. ff.
Zurükführung der Regeln §. 55. auf die Formel §. 45.	58.	123. f.

	§.	S.
Vierter Hauptfall: Wenn zwey Seiten eines Dreyeks und der Winkel dazwischen gegeben sind	59—104.	124—208.
I, Wenn die gegebene Seiten gleich sind; und der gegebene Zwischenwinkel		
A. ein rechter;	59.	124.
B. ein schiefer Winkel ist.	60.	124. f.
II. Wenn die gegebene Seiten ungleich sind: der gegebene Zwischenwinkel aber wieder		
A. ein rechter ist.	61—74.	126—169.
1te Auflösungsart mittelst I. 47 und der allgemeinen Regel §. 10. 13.	61.	126. f.
Unbequemlichkeit dieser Methode in Beziehung auf die Berechnung der Winkel; und dadurch veranlaßte Einführung der Tangenten in den trigonometrischen Calcul	62.	127. ff.
Tangenten spizer Winkel; Tafeln derselben	62. f.	128. ff.
2te Darauf gegründete Auflösungsart eines ungleichseitigen rechtwinklichten Dreyeks, dessen zwey Seiten um den rechten Winkel gegeben sind	64. 68. 74.	137. 139. 166. ff.
Cotangenten spizer Winkel	64.	137. f.
Gegenseitige Verhältnisse der Tangenten, Cotangenten, Sinus, Cosinus spizer Winkel	65. ff.	138. f.
Unbequemlichkeit beyder vorhergehenden Berechnungsarten der Hypotenuse in gewissen Fällen; und dadurch veranlaßte Einführung der		

	§.	S.
Secanten und Coſecanten in den trigonometriſchen Calcul	69.	139. ff.
Secanten u. Coſecanten ſpizer Winkel	69. f. 72.	139. ff. 159. ff.
Gegenſeitige Verhältniſſe der Secanten und Coſinus, Coſecanten und Sinus	72.	159. ff.
Secantentafeln	69.	141. ff.
3te Art mittelſt derſelben des Dreyeks Hypotenuſe zu berechnen	69. 74.	140. 167. ff.
Vollſtändige Tafeln der Sinus, Tangenten, Secanten, und ihrer Logarithmen	71.	147. ff.
Urſprung und Grund der Benennungen Sinus, Tangenten, Secanten	14. 71.	16. ff. 156. ff.
Zuſammenſtellung der trigonometriſchen Verhältniſſe der Hypotenuſe eines rechtwinklichten Dreyeks zu den Seiten um den rechten Winkel, ſo wie dieſer unter einander	73.	164. ff.
B. Wenn der gegebene Winkel zwiſchen den zwey gegebenen ungleichen Seiten ſchief iſt.	75—104.	169—208.
1te Art des Dreyeks Fläche, dritte Seite, und die Sinus der übrigen Winkel zu berechnen; nebſt allgemeinen Ausdrüken derſelben durch die gegebenen Stüke	75. ff. 79.	169. ff. 173. ff.
2°. Zurückführung der Berechnung der Winkel und der dritten Seite auf den vorigen Fall A.	78. f.	172. f.
3°. Reduction der Berechnung der übrigen zwey Winkel auf die ihres halben Unterſchieds; oder auf die der Summe des kleineren und der Hälfte des gegebenen:		
α) wann die zwey Seiten ſelbſt;	80. ff. 91.	177. ff. 190. ff.
β) wenn die Logarithmen derſelben unmittelbar gegeben ſind:	84. f.	184. f.
Und alsdenn Berechnung der dritten Seite nach der allgemeinen Regel §. 10. 13.	86. 91.	186. 191. f.
4°. Zweyte Art des Dreyeks dritte Seite unabhängig von ſeinen geſuchten Winkeln, mittelſt eines Hülfswinkels, zu berechnen	87. 91.	186. ff. 191. ff.
5°. Noch zwey Arten dieſe dritte Seite		

	§.	S.
unabhängig von den gesuchten Winkeln zu berechnen; und zwey allgemeine Ausdrüke derselben durch die gegebenen Stüke	88. 91.	188. 191. ff.
6°. Allgemeine Ausdrüke der Tangente und Cotangente des gesuchten kleineren Winkels durch die gegebenen Stüke.	89. f. 91.	189. f. 191. ff.
Tangenten und Secanten rechter und stumpfer Winkel	92. f.	194. ff.
Derselben Cotangenten und Cosecanten	94.	197. ff.
Ausdehnung der §. 65. 66. 67. 72. angegebenen Verhältnisse auf Tangenten, Cotangenten, Sinus, Cosinus, Secanten und Cosecanten stumpfer Winkel	95. f.	199.
Zusammenziehung der Ausdrüke der Cotangente des gesuchten kleineren Winkels §. 90. in einen auf beyde Fälle, (wenn nämlich der gegebene Winkel spiz od. stumpf ist) passenden	97.	199. f.
Ausdehnung sowohl dieses Ausdruks, als des für die Tangente desselben Winkels §. 89, auf den Fall A, wenn der gegebene Winkel ein rechter ist	98.	200.
Anwendung beyder Ausdrüke, nämlich des der Tangente §. 89. und des der Cotangente §. 97. auf den gesuchten größern Winkel; und Unterscheidung der Fälle, in welchen dieser Winkel spiz, stumpf, oder ein rechter wird	99—103.	200—207.
Abkürzung der Berechnung der dritten Seite in dem lezten Fall	104.	207. f.
Anwendung der Tangenten und Secanten bey den ersten drey Hauptfällen	105 — 107.	208—213.
1°. Anwendung auf die Berechnung eines rechtwinklichten Dreyeks, dessen eine Seite um den rechten Winkel und ein spizer Winkel gegeben sind	105.	208.
2°. Allgemeine Ausdrüke der Höhe, Fläche, und übrigen zwey Seiten eines Dreyeks, dessen eine Seite und die zwey anliegende Winkel, oder ein anliegender und der gegenüberstehende Winkel gegeben sind	105.	208. ff.

	§.	S.
3°. Allgemeine Ausdrüke der dritten Seite eines Dreyeks, dessen zwey Seiten und der Gegenwinkel der einen gegeben sind; so wie der Cotangente des Gegenwinkels der andern, und des Sinus des Zwischenwinkels der gegebenen Seiten	106.	210. ff.
4°. Bestimmung der Tangenten der halben Winkel eines ungleichseitigen Dreyeks, dessen drey Seiten gegeben sind	107.	212. f.
Anwendung der ebenen Trigonometrie auf zusammengesezte trigonometrische Aufgaben.	108 — 124.	213—331.
1. Berechnung des Abstands der Spizen zwey auf der nämlichen Grundlinie stehender Dreyeke; deren gemeinschaftliche Grundlinie, und die Winkel an derselben gegeben sind.		
Oder Berechnung eines Viereks: dessen		
α) eine Seite gegeben ist, samt den Winkeln, welche die zwey daranliegende Seiten des Viereks und seine Diagonalen mit der gegebenen Seite machen;		
β) eine Diagonale gegeben ist, samt den Winkeln, welche die Seiten des Viereks mit derselben machen	108.	213—221.
2. Umgekehrt, aus der gegebenen Entfernung der Spizen zwey auf der nämlichen Grundlinie stehender Dreyeke, und den gegebenen Winkeln, welche die Seiten der Dreyeke mit ihrer gemeinschaftlichen Grundlinie machen, diese berechnen.		
Oder ein Vierek berechnen: dessen		
α) eine Seite gegeben ist, samt den Winkeln an der gegenüberliegenden Seite, welche die andere zwey Seiten und seine Diagonalen mit dieser Gegenseite machen;		
β) eine Diagonale gegeben ist, samt den Winkeln, welche die Seiten des Viereks mit der andern Diagonale desselben machen	109.	221—226.
3. Berechnung von Viereken aus ihren		

	§.	S.
Seiten und den Winkeln derselben: wenn gegeben sind		
α) die vier Seiten und ein Winkel	110.	227—229.
β) drey Winkel und zwey aneinander liegende Seiten	111.	230—234.
γ) drey Winkel und zwey einander gegenüber stehende Seiten	112. f.	234—241.
δ) drey Seiten und derselben Zwischenwinkel	114. f.	241—252.
ε) drey Seiten und die zwey an der vierten Seite liegende Winkel	116.	252—262.
ζ) drey Seiten und zwey Winkel, einer zwischen zwey gegebenen Seiten, der andere an der vierten Seite; und zwar		
a) beyde an einer gegebenen Seite liegend	117.	262—267.
b) einer dem andern gegenüberliegend:	118.	267—273.
4. Construktion und Berechnung eines Vierecks, dessen zwey anliegende Seiten und ihr Zwischenwinkel, oder die ihre Endpunkten verbindende Diagonale, gegeben sind, samt den Winkeln, welche die andere Diagonale mit den zwey andern Seiten des Vierecks macht. Oder Auflösung der Aufgabe: die Lage eines Orts aus den in demselben beobachteten scheinbaren Entfernungen drey der Lage nach gegebener Oerter bestimmen	119. f.	273—302.
5. Berechnung eines Fünfeks aus seinen Winkeln und drey an einander liegenden Seiten; und Theilung des Fünfeks in zwey gleiche Theile durch eine aus der Spize eines Winkels der Figur gezogene gerade Linie	121.	302—311.
Anweisung zur Berechnung zwey aneinander liegender Seiten und des Inhalts eines jeden Vieleks, dessen übrige Seiten und die Winkel gegeben sind	121.	309.
6. Berechnung eines Fünfeks aus vier aneinander liegenden Seiten und ihren drey Zwischenwinkeln; und Thei-		

	§.	S.
lung des Fünfeks in zwey den Abschnitten einer in einem auf ihr gegebenen Punkt getheilten Seite desselben proportionale Theile durch eine aus jenem Punkt gezogene gerade Linie	122.	312—317.
Bemerkung über die Berechnung eines jeden Vieleks, dessen Seiten, eine ausgenommen, gegeben sind, samt den Zwischenwinkeln der gegebenen Seiten	122.	313.
7. Berechnung eines Sechseks aus einer Seite desselben und den Winkeln, welche die aus den Endpunkten der gegebenen Seite gezogene Diagonalen und die zwey anliegende Seiten der Figur mit der gegebenen machen; und Theilung des Sechseks in drey ein gegebenes Verhältniß zu einander habende Theile durch gerade Linien, die aus einem innerhalb der Figur gegebenen Punkt gezogen werden	123.	317—324.
Bemerkungen über das Aufnehmen einer geradlinichten Figur aus einer Standlinie: diese mag entweder, wie in dem vorgelegten Fall des Sechseks, eine Seite der Figur seyn; oder ausserhalb, oder innerhalb, oder theils innerhalb, theils ausserhalb der Figur liegen	123.	324. f.
Auflösung der vorhergehenden Aufgabe: wenn statt der Seite des Sechseks, an deren Endpunkten die Spizen der gegebenen Winkel liegen, eine der übrigen ihr nicht anliegenden Seiten der Figur gegeben wäre	123.	325.
8. In einer Reihe dergestalt an einander hängender Dreyeke, daß jedes mit dem darauf folgenden eine Seite gemein hat, sind in dem ersten eine Seite und die Winkel, in allen übrigen aber die Winkel gegeben; und durch eine Spize eines dieser Dreyeke ist eine gerade Linie unter einem gegebenen Winkel mit einer Seite dieses Dreyeks gezogen: man soll die Seiten dieser Dreyeke, die von ihren Spizen auf die gezogene ge-		

	§.	S.
rade Linie gefällte Perpendikel, und die Abschnitte dieser Linie berechnen, welche zwischen ihren Anfangspunkt und jedes der auf sie gefällten Perpendikel fallen	124.	325—331.
Beyträge zur Geschichte der Auflösung der ebenen Dreyeke	125—194.	332—
Verfahren von		
Ptolemäus	125.	332—335.
Albatenius	126.	335. ff.
Geber	127.	337—340.
Campanus	128.	340.
Regiomontanus	129—139.	340—349.
Copernicus	140—145.	349—352.
Erste ausdrükliche Aufstellung des Sazes §. 10. 13. und verschiedene Beweise desselben	138.	347. ff.
Auflösung ungleichseitiger rechtwinklichter Dreyeke, deren zwey Seiten um den rechten Winkel, oder eine derselben und ein spizer Winkel gegeben sind, mittelst der Tangenten und Secanten Tafeln	146.	352.
Anwendung der Tangenten zur Berechnung der übrigen zwey Winkel ungleichschenklichter Dreyeke, deren Schenkel und schiefer Zwischenschenkel gegeben sind:	147—161.	353—373.
Namentlich Geschichte der Methode §. 80—83. 85.	147—153. 155—158.	353—363. 364—367.
Erste Aufstellung der Regel §. 90. 97. 99. ff.	154.	363. f.
Geschichte der Methode 84. f. —	159. ff.	367—373.
Berechnung der Winkel eines nicht gleichseitigen Dreyeks, dessen drey Seiten gegeben sind, unabhängig von dessen Höhe, wie in §. 30. f. 38.	162.	373.
Ausdruk des Cosinus der Winkel eines ungleichseitigen Dreyeks durch die drey Seiten desselben	163.	373. f.
Geschichte der Methode §. 48. ff. den Inhalt eines Dreyeks aus seinen drey Seiten zu berechnen	164—175.	374—394.
Geschichte der Methoden §. 53—58. 107. die Winkel eines Dreyeks aus seinen drey Seiten zu berechnen	176—184.	394 —

	§.	S.
Berechnung der übrigen Winkel in Dreyecken, deren zwey Seiten und ein schiefer Zwischenwinkel gegeben sind, nach §. 77. 89. f. 97. ff.	185.	403. f.
Für eben diesen Fall Berechnung der dritten Seite nach §. 76. 87. f.	186—190.	404—406.
Höhe und Fläche eines Dreyecks, dessen Grundlinie und die zwey Winkel an derselben gegeben sind	191.	406.
Geschichte der Methoden, in einem Dreyek, dessen zwey Seiten und der Gegenwinkel der einen gegeben sind, die dritte Seite nach §. 106;	192.	406.
Den Zwischenwinkel überhaupt nach §. 106;	193.	407. f.
und besonders in einem rechtwinklichten Dreyek, dessen gegebene Hypotenuse und Cathetus wenig von einander verschieden sind, nach §. 33. zu berechnen	194.	409. f.
Zusäze.		
Einige polygonometrische Säze, als Zusäze zu §. 121. 122.	195—204.	410—418.
Zu §. 16. Note e. S. 23.		418—424.
Zu §. 16. Note h. S. 36. f.		
Zu §. 16. Note i. S. 37.		
Zu §. 69. Note e. S. 141. ff.		
Zu §. 71. Note a. S. 151.		
Zu §. 71. Note a. S. 156.		

Ebene Trigonometrie.

§. 1.

Wenn drey zur Bestimmung eines geradlinigten Dreyeks hinreichende Stüke gegeben sind, wovon die einfachsten folgende sind:

1) die drey Seiten desselben;

2) zwey Seiten und der zwischen ihnen liegende Winkel;

3) zwey Seiten und der Winkel, welcher einer derselben gegenüber liegt, mit der Art des der andern (wenn sie größer als jene ist) gegenüber liegenden Winkels (ob er nämlich, wenn er in diesem Fall schief wird, spizig oder stumpf seyn soll);

4) zwey Winkel und die dazwischen liegende Seite;

5) zwey Winkel und die einem derselben gegenüber liegende Seite:

so kann man ein dem ersten durchaus gleiches, oder ein demselben ähnliches Dreyek beschreiben. (Eukl. Elem. I, 4. 8. 26. VI, 4. 5. 6. 7.) Mißt man alsdenn in diesem, was man in dem vorgegebenen Dreyek nicht hat unmittelbar messen können oder wollen; so kann man dadurch das bestimmen, was in dem ersten nicht wirklich gemessen worden ist. Man wird sich aber nicht darauf verlassen können, auf diese Art die gesuchten Größen genau zu erhalten: da zu den Fehlern, welchen die unmittelbare Ausmessung der gegebenen Größen selbst ausgesezt ist, auch noch diejenigen hinzu kommen, die man so wohl bey der nach denselben vorgenommenen Verzeichnung des andern

Dreyeks, als auch bey Messung der gesuchten Größen an diesem begehen kann; vor welchen, der beschränkten Genauigkeit der Instrumente und Schärfe unseres Gesichts wegen, auch die gröste Sorgfalt und Achtsamkeit nicht ganz sicher stellen können. Da man überdiß meistentheils wegen des eingeschränkten Raums genöthigt ist, ein dem vorgegebenen ähnliches, viel kleineres Dreyek zu beschreiben; so veranlassen die Fehler der Zeichnung und Ausmessung des lezteren desto größere in Absicht auf die Seiten, Höhe, Flächeninhalt des vorgegebenen Dreyeks, weil man diese durch Schluß vom kleinern aufs Größere daraus herleitet. Vornehmlich geschieht es bey einer langen Reihe mit einander verbundener und von einander abhängender Dreyeke leicht, daß die, obgleich anfangs unmerklichen, Unrichtigkeiten der geometrischen Construction und ihre Folgen sich so anhäufen, daß am Ende sehr beträchtliche Fehler daraus entstehen. Man hat deswegen auf Methoden gedacht, aus drey gegebenen Bestimmungsstüken eines Dreyeks, besonders aus den oben angeführten, die übrigen zu dem Dreyek gehörigen Größen allein durch Rechnung herzuleiten: entweder, wo möglich, vollkommen genau; oder den wahren so nahe kommend, als man will, oder als es die Genauigkeit der gegebenen Stüke gestattet, und die Beschaffenheit der Aufgabe erfordert.

§. 2.

Obgleich, wenn zwey Seiten eines Dreyeks gleich sind, auch die ihnen entgegengesezten Winkel gleich sind; und umgekehrt (Elem. I, 5. 6.): und gleichfalls, wenn zwey Seiten eines Dreyeks ungleich sind, auch die ihnen gegenüber liegenden Winkel ungleich sind, namentlich der größeren Seite der größere Winkel gegenüber liegt; und umgekehrt (Elem. I, 18. 19.): so nehmen doch die Winkel und die gegenüber liegenden Seiten eines Dreyeks nicht in demselben geometrischen Verhältniß zu und ab. Dieß ersieht man am leichtesten an einem gleichschenklichten rechtwinklichten Dreyek. Der Winkel an der Spize, nach der Voraussezung ein rechter, ist das Doppelte jedes der bey-

den Winkel an der Grundlinie (Elem. I, 5. 32.): die Grundlinie aber oder die Hypotenuse, welche kleiner ist als die zwey übrigen Seiten des Dreyeks zusammen (El. I, 20.), ist kleiner als das Doppelte eines der beyden Schenkel oder Catheten; und verhält sich (Elem. I, 47.) zu einem der beyden Schenkel nur wie $\sqrt{2}:1$. Die Grundlage des trigonometrischen Calculs muß also anders woher, als aus der unmittelbaren Vergleichung der Seiten und gegenüberliegenden Winkel der Dreyeke, oder der Kreisbögen, welche diese messen und ihnen proportional sind (El. VI, 33), genommen werden: und vielleicht haben folgende oder ähnliche Schlüße dazu geleitet.

§. 3.

Wenn ein Kreis um ein Dreyek beschrieben wird: so mißt jeden Winkel des Dreyeks, als einen Winkel an dem Umfang oder im Kreisabschnitt, der halbe Bogen dieses Kreises, auf welchem er steht (El. III, 29. VI, 33.); folglich wird jede Seite des Dreyeks in diesem Kreis die Chorde oder Sehne des doppelten Bogens, der den gegenüberliegenden Winkel mißt.

Ist also die Seite AB eines Dreyeks samt den ihr anliegenden Winkeln CAB, CBA, folglich auch (Elem. I, 32.) der dritte Winkel ACB gegeben; so reducirt sich die Berechnung der übrigen zwey Seiten des Dreyeks darauf: daß man aus der durch den Winkel ACB gegebenen Anzahl Grade des Bogens AKB, und aus der gegebenen Länge der Chorde AB dieses Bogens, den Durchmesser CD des um das Dreyek beschriebenen Kreises; und daraus ferner die Länge der Chorden AC, BC berechne, welche in diesem gegebenen Kreis die Bogen AFC, BEC, umspannen, deren Anzahl Grade oder Verhältniß zum Umfang durch die Winkel CBA, CAB gegeben ist. Diß kann wenigstens in einigen Fällen mit Beyhülfe der auf die Beschreibung der regulären Figuren sich beziehenden Säze geschehen. *Fig.* 1.

§. 4.

Es seyen z. B. die Winkel BAC = 75°, ABC = 45°; folglich ACB = 60°. Der Durchmesser CD des um das Dreyek beschriebenen Kreises wird gefunden werden, wenn man den Durchmesser eines Kreises berechnet, in welchem die Chorde eines Bogens von 120° oder die Seite eines gleichseitigen darein beschriebenen Dreyeks gegeben ist. Diß wird mittelst El. XIII, 12. geschehen können, woraus $CD^q = \frac{4}{3} AB^q$.

Alsdenn ist aber in diesem Kreis AC die Chorde von 90°, oder die Seite des darein beschriebenen Quadrats; folglich (El. I, 47.) $AC^q = \frac{1}{2} CD^q = \frac{2}{3} AB^q$. In eben diesem Kreis ist BC die Chorde eines Bogens von 150°; folglich BD die Chorde von 30° oder die Seite eines darein beschriebenen regulären Zwölfeks. Macht man aber die Chorde DK = DB; und zieht man BK, welche die Seite des regulären in den Kreis beschriebenen Sechseks ist: so ist

$BD^q = CD \times DL$ (VI, 8. 17.) $= CD(GD - GL)$

$= CD(\frac{1}{2}CD - \frac{1}{4}CD\sqrt{3})$ weil $BL = \frac{1}{2}BK = \frac{1}{2}GD$ (IV, 15)

$= \frac{1}{2}CD^q - \frac{1}{4}CD^q\sqrt{3}$

folglich

$BC^q = CD^q - BD^q$ (I, 47) $= \frac{1}{2}CD^q + \frac{1}{4}CD^q\sqrt{3} = \frac{2}{3}AB^q + \frac{1}{3}AB^q\sqrt{3}$

§. 5.

Es seyen wiederum die Winkel ACB = 72°, BAC = 30°; folglich ABC = 78°: und die Seite AB = 150 Fuß. Der Durchmesser AD des um das Dreyek beschriebenen Kreises wird gefunden werden, wenn man den Durchmesser eines Kreises berechnet, in welchem die Chorde von 144 Grad 150 Fuß lang ist. Da ein Bogen von 144 Gr. kein aliquoter Theil des Umfangs ist, so ist die Chorde von 144° nicht die Seite einer regulären Figur: die Chorde BD des Supplements (der Ergänzung zum halben Umfang) des Bogens AB aber, als Chorde von 36° ist die Seite eines regulären in den Kreis beschriebenen Zehn- *Fig.* 2.

eks. Wenn der Durchmesser AD, oder die Chorde BD gegeben wäre: so ließe sich diese aus jenem, oder jener aus dieser, mit Hülfe der geometrischen Beschreibung des regulären Zehneks in einen gegebenen Kreis oder auf einer gegebenen Seite, leicht und direct herleiten; und hieraus ferner AB, wovon das Quadrat = $AD^q - BD^q$ (El. III, 31. I, 47.) Daß hier, wo AB gegeben ist, die Berechnung des Durchmessers AD indirect nach der sogenannten Regel Falsi geführt werden könne, lehrt die Bemerkung: daß, wenn in einem Kreis von beliebigem Durchmesser ad Fig. 3. ein reguläres Zehnek, dessen Seite db ist, beschrieben, und die Chorde ab gezogen wird; das Dreyek abd dem ABD ähnlich, (VI, 4.) und daher ab : AB = ad : AD ist.

Es sey also z. B. der Durchmesser ad = 100 Fuß. So sind (XIII, 10 Schol. der Bärmanischen Ausgabe) *Fig. 2, 3.*

$gh^q = gf^q = 5eg^q = \frac{5}{16}ad^q = 3125$ Quadratfuß; und $gh = 55{,}9017$ Fuß:

$bd^q = eh^q = gh^q + ge^q - 2ge \times gh$ (II, 7 Schol.)

$= 6ge^q - 2ge \times gh = \frac{3}{8}ad^q - \frac{1}{2}ad \times gh$:

$ab^q = ad^q - bd^q = \frac{5}{8}ad^q + \frac{1}{2}ad \times gh = 9045{,}0850$ Quadr. Fuß;

und $ab = 95{,}105$ Fuß;

folglich $95{,}105 : 150 = 100 : AD$. Daher $AD = 157{,}72$ Fuß.

In diesem Kreis aber (Fig. 2) ist des Dreyeks Seite BC die Chorde von 60°, oder die Seite des in dem Kreis beschriebenen regulären Sechseks; also (IV, 15) $BC = \frac{1}{2}AD = 78{,}86$ Fuß.

In eben diesem Kreis ist AC die Chorde von 156°; folglich DC die Chorde von 24°, oder die Seite des darein beschriebenen regulären Fünfzehneks. Wird also in einem Kreis von demselben Durchmesser AD ein gleichseitiges Dreyek FLS (Fig. 4.) und ein reguläres Fünfek FJMRK beschrieben; so sind (Fig. 2. 4.) CD = LM (El. IV, 16.) und $AC^q = AD^q - LM_q$ (III, 31. I, 47.)

Fig. 4. Aber $GH^q = GF^q = \frac{5}{16} AD^q$ (XIII, 10. Schol.) = 7773,5588 Qdr. Fuß
und GH = 88,1678 Fuß.
$EH^q = \frac{3}{8} AD^q - \frac{1}{2} AD \times GH$ wie oben von eh^q gezeigt worden ist.
$MR^q = FH^q$ (XIII, 10 Schol.) $= EF^q + EH^q = \frac{5}{8} AD^q - \frac{1}{2} AD \times GH$
$PM^q = \frac{5}{32} AD^q - \frac{1}{8} AD \times GH$ = 2148,5588 Quadr. Fuß.
und PM = 46,3525 Fuß.
$EP^q = EM^q - PM^q = \frac{3}{32} AD^q + \frac{1}{8} AD \times GH$
= 4070,2882 Q. F. und EP = 63,7988 Fuß.
Ferner $LO^q = \frac{1}{4} LS^q = \frac{3}{16} AD^q$ (XIII, 12) = 4664,1353 Q. F.
und LO = 68,2944 Fuß.
EO = $\frac{1}{4}$ AD (XIII, 12. Schol. 3.) = 39,4298 Fuß
folgl. LN = LO - PM = = 21,9419
MN = EP - EO = = 24,3690
Fig. 2. 4. CD^q oder $LM^q = LN^q + MN^q$ = 1075,2951 Q. F.
Fig. 2. $AC^q = AD^q - CD^q$ = 23800,0930 Q. Fuß
und AC = 154,27 Fuß.

§. 6.

Diese Beyspiele, besonders das leztere, zeigen zur Genüge, wie weitläufig und beschwerlich diese Berechnungsart seyn würde. Ueberdiß würde sie wegen der kleinen Anzahl der regulären Figuren, welche geometrisch beschrieben werden können (El. IV, 16. Schol.), und der vielen Bogen, welche weder selbst, noch ihre Supplemente, aliquote Theile des Umfangs sind, nicht einmal für jene Classe von Aufgaben, zu welcher die Beyspiele §§. 4. 5. gehören, allgemein ohne andere Hülfsmittel ausreichen.

Ihr Gebrauch hörte aber bey den übrigen Classen von Aufgaben, wenn z. B. die drey Seiten eines Dreyecks gegeben sind, beynahe gänzlich auf. In diesem Fall wäre es zwar leicht, den Durchmesser CD (*Fig.* 1.) des um das Dreyeck beschriebenen Kreises anzugeben. Wird nemlich aus der Spize des Winkels C, durch welche der Durchmesser gezogen ist, auf die gegenüberliegende Seite AB ein Perpendi-

kel CM gefällt, und die Chorde BD gezogen: so sind, weil der Winkel CAM = CDB (III, 25.), die rechtwinklichten Dreyeke CMA, CBD einander ähnlich; und es ist (VI, 4.)

CM : AC = BC : CD.

Aus den gegebenen drey Seiten eines Dreyeks aber findet man, wie unten gezeigt werden wird, leicht seine Höhe CM. Hingegen die Frage von der Größe der Winkel des Dreyeks, oder von der Anzahl Grade der Bogen des um das Dreyek beschriebenen Kreises, auf welchen seine Winkel an dem Umfang stehen, wird nun auf diese zurükgeführt: aus der gegebenen Länge der Chorden eines Kreises, dessen Durchmesser gegeben ist, das Verhältniß der Bogen, welche die Chorden umspannen, zum Umfang bestimmen. Wollte man zu ihrer Auflösung die Beschreibung der regulären Figuren zu Hülfe nehmen; so müßte man untersuchen: ob die gegebene Chorde, oder die Chorde des Supplements des der gegebenen Chorde zugehörigen kleineren Bogens, die Seite einer regulären in den gegebenen Kreis beschreibbaren Figur sey, und wieviel Seiten diese Figur habe? welches, einige wenige besondere Fälle ausgenommen, ohne Zuziehung anderer Hülfsmittel, nur durch Versuche entdekt werden könnte.

§. 7.

Die Bemerkung, wovon wir schon bey der Berechnung des Beyspiels §. 5. Gebrauch gemacht haben, und welche der 2 Saz d. IV. B. der El. allgemein auf alle Dreyeke ausgedehnt darstellt, dient zur Hebung der meisten so eben angeführten Schwierigkeiten. Nach diesem 2 S. IV. B. kann nämlich in jeden Kreis ein Dreyek abc beschrieben werden, welches einem gegebenen ABC (*Fig.* 2, 3.) gleichwinklicht, folglich (VI, 4.) ähnlich ist; und alsdenn sind

AB : BC : AC = ab : bc : ac.

ab, bc, ac sind aber in dem beliebig angenommenen Kreis die Chorden der doppelten Bogen, welche die Winkel c = C, bac = BAC, abc = ABC messen. Folglich verhalten sich

allgemein die Seiten eines jeden Dreyeks, wie die in irgend einerley Kreis gezogenen Chorden der doppelten Bogen, welche die gegenüberliegenden Winkel des Dreyeks messen.

Vermöge dieses Sazes wird die Rechnung nicht mehr auf den um das Dreyek beschriebenen Kreis selbst eingeschränkt: und man kann

1) wenn die Winkel des Dreyeks gegeben sind, sich der Mühe, den Durchmesser des Kreises zu berechnen, überheben;

2) ist es nicht nöthig, die Berechnung der Chorden der doppelten Bogen, welche diese Winkel messen, für jedes vorgegebene Dreyek besonders anzustellen, sondern man kann diese einmal für irgend einen Durchmesser berechnete Chorden immer gebrauchen.

Wüßte man zum Beyspiel: in einem Kreis, dessen Durchmesser 20 Fuß ist, seyen die Chorden der Bogen von 150°, 90°, 120°, beziehungsweise 19,318516; 14,142136; 17,320508 Fuß; so reducirte sich die Berechnung des Beyspiels §. 4. (*Fig.* 1.) auf folgende zwey Proportionen:

$$17{,}320508 : \begin{Bmatrix} 14{,}142136 \\ 19{,}318516 \end{Bmatrix} = AB : \begin{Bmatrix} AC \\ BC \end{Bmatrix}$$

§. 8.

Die Berechnung der Seiten eines Dreyeks, dessen eine Seite und die Winkel gegeben sind, wird also keine Schwierigkeit haben, wenn man für irgend einen Durchmesser berechnete Tafeln der Chorden für alle einzelne Grade, oder zu größerer Genauigkeit, für alle einzelne Minuten, von 0° bis 180° bey der Hand hat. Diese enthalten zugleich die Chorden der Bogen, welche größer sind als 180° oder der halbe Umfang: weil die Chorde eines jeden Bogens, der größer ist als der halbe Umfang, einerley ist mit der Chorde des weniger als der halbe Umfang betragenden Bogens, welcher jenen zum ganzen Umfang oder zu 360° ergänzt.

Eine Tafel der Chorden für alle einzelne halbe Grade von 0° bis 180°, und die Methode sie zu berechnen, giebt Ptolemäus in seinem gewöhnlich nun Almagest genannten Lehrbegriff der Astronomie (a). Für den ersten Erfinder derselben, so wie der ebenen und sphärischen Trigonometrie, wird insgemein Hipparch gehalten, welcher in dem zweyten Jahrhundert vor C. G. den Grund zu der genauen Astronomie gelegt hat (b). Wenigstens bemerkt Theon in seinen Erläuterungen des Almagests (c): daß Hipparch in zwölf, und Menelaus (d) in sechs Büchern die Be-

(a) Κλ. Πτολεμαιου Μεγαλης Συνταξεως Βιβλ. ιγ. Θεωνος Αλεξανδρεως εις τα αυτα Υπομνηματων Βιβλ. ια. Basil. 1538. fol. Συνταξ. Βιβλ. α. Περι της πηλικοτητος των εν τω κυκλω ευθειων. p. 8—12. Κανονιον των εν κυκλω ευθειων. p. 13—16.

Claudii Ptolemæi Pelusiensis Alexandrini omnia, quæ extant, Opera, Geographia excepta. Almagesti seu magnæ Compositionis mathematicæ Opus, a Georg. Trapezuntio tralatum, Lib. XIII. — Basil. 1541. fol. Lib. I. Cap. IX. De quantitate rectarum linearum, quæ in circulo perducuntur, p. 9—14. Cap. X. Tabula. p. 15—18.

Hr. Hofr. Kästner beschreibt des Ptolemäus Tafel und Berechnungsart der Sehnen in seinen geometrischen Abhandlungen, I. Samml. S. 525. ff. II. Samml. S. 354. ff.; und in seiner Geschichte der Mathematik, I. Band, S. 512. ff.

(b) Weidleri Hist. Astron. p. 140. sqq. Montucla Hist. des Mathemat. Nouv. Edit. T. I. p. 257. sq. 265. Bailly Gesch. d. neuern Astron. I. B. S. 104. ff. 142. Hipparchs von Ptolemäus angeführte Beobachtungen fallen auf die Jahre 160 bis 125 nach den eben angeführten Schriftstellern; nach Hist. cœlestis ex commentariis observationum Tychonis Brahe. Aug. Vindel. 1666. Lib. προλεγομενος, p. X. sqq. auf 162 bis 127. vor C. G.

(c) Εις το τε Πτολεμαιου Βιβλ. α. Υπομνημα. p. 39. Λεδεικται μεν εν και Ιππαρκω η πραγματεια των εν κυκλω ευθειων εν ιβ. Βιβλιοις· ετι και Μενελαω εν ς. Θαυμασαι δ εστι τον ανδρα (Πτολεμαιον) πως ευμεταχειριστως δι ολιγων και ευχειρων θεωρηματων την ευρεσιν της πηλικοτητος αυτων πεποιηται.

(d) Zwey von ihm zu Rom gemachte Beobachtungen, welche Ptolemäus (Almag. VII, 3.) anführt; fallen auf das Jahr 98. nach C. G. Hist. cœlest. p. XVII.

handlung und Beziehung der Sehnen im Kreise vor Ptolemäus (e) gelehrt; dieser aber die Berechnung derselben

Vorhanden sind noch Menelai (Alexandrini) Sphæricorum Libri III. Quos olim, collatis MSS. Hebraicis & Arabicis, typis exprimendos curavit Vir cl. Edm. Halleius — Præfationem addidit G. Costard. Oxon. 1758. in 8.

Von einer früheren Ausgabe dieses Werks, welche Halley auch kannte (S. seine Anmerk. zu dem 18. Saz des I. Buchs. p. 23.), führe ich an, was in dem an D. Francisci Maurolyci, Abbatis Messanensis, Opuscula mathematica nunc primum in lucem edita — Venetiis 1575. in 4. angehängten vier Seiten langen Index lucubrationum Maurolyci davon erwähnt ist; nämlich auf der ersten Seite: Menelai Sphærica Libris 3. multis demonstrationibus adaucta, ad scientiam sphæralium triangulorum pertinentia; und auf der vierten Seite: Notandum, quod, ex supra scriptis operibus, Theodosii, Menelai, Maurolyci Sphærica; item Autolici Sphæra; Theodosii de Habitationibus; Euclidis Phænomena; Demonstratio & praxis Tabellarum Sinus recti, Fœcundæ, ac Beneficæ; Compendium Mathematicæ brevissimum; simul in unum volumen Messanæ impressa fuerunt a Petro Spina, filio Georgii Spinæ Germani, anno salutis 1558. Maurolycus war 1494. zu Messina geboren; und ist eben daselbst den 21 Jul. 1575. gestorben (Weidler p. 363.) Des Drukers seiner Opuscula math. Zueignungsschrift an den Herzog von Urbino, Franz Maria II, ist den 26. Jul. 1575. datirt.

Ein auf die Definitionen, blosse Angabe der Säze, und einige Vorreden des Maurolycus eingeschränkter Auszug aus den sechs ersten Stüken obiger Sammlung findet sich in Universæ Geometriæ mixtæque Mathematicæ Synopsis — Studio & opera F. M. Mersenni M. (Fratris Marini Mersenni, Minimi) Paris 1644. in 4. p. 179. — 255: namentlich Præfatio in Sphærica Menelai, p. 204. sq. und die Säze der drey Bücher dieser Sphæricorum (worunter alle der Halleyschen Ausgabe, den ersten und lezten des zweyten, und den 11. 12. 13. 14ten des dritten Buchs ausgenommen; ausser jenen aber mehrere, grösstentheils Conversen, Vorbereitungs- und Zusäze) p. 205 — 230.

Nachrichten von Menelaus, und von der Mersenniſchen Inhaltsangabe seiner Bücher von den Kugeldreyeken stehen in Kästners Geometr. Abhandl. II. Samml. S. 358. ff. und in seiner Gesch. d. Math. I. B. S. 518. ff.

(e) Die Reihe seiner Beobachtungen, die er in dem Almagest anführt, geht von dem Jahr 125 bis 141. nach C. G. Hist. cœlest. p. XVII. sqq.

mit bewundernswürdiger Geschiklichkeit auf wenige passende Lehrsäze zurükgeführt habe.

§. 9.

Vermittelst dieses Canons der Chorden lassen sich auch die oben §. 6. bey Berechnung der Winkel eines Dreyeks, dessen Seiten gegeben sind, bemerkte Schwierigkeiten heben. Denn die Chorden LM, lm (*Fig.* 5, 6.) welche in irgend zwey Kreisen ähnliche, oder einerley Anzahl Grade enthaltende Bogen umspannen, verhalten sich der Aehnlichkeit der Dreyeke ELM, elm, oder HLM, hlm (El. VI, 33. 4.) wegen, allgemein zu einander wie die Halbmesser EI, el, oder wie die Durchmesser MH, mh der Kreise. Nun sey (*Fig.* 2, 3) ad der Durchmesser des Kreises, für welchen die Chordentafel berechnet ist; und in diesen Kreis sey ein Dreyek abc beschrieben, dem gegebenen ABC ähnlich: so hat man folgende Proportionen:

$$AD : ad = \begin{cases} AB : ab \\ BC : bc \\ AC : ac : \end{cases}$$

mittelst welcher, wenn man nach §. 6. aus den gegebenen Seiten des Dreyeks ABC den Durchmesser AD des darum beschriebenen Kreises berechnet hat, die Chorden ab, bc, ac gefunden werden, welche in dem Kreis, zu welchem die Chordentafel nach der Voraussezung gehört, die Bogen akb, bdc, afc umspannen, die den Bogen AKB. BDC, AFC beziehungsweise ähnlich sind. Sucht man nun jene Chorden ab, bc, ac in der Tafel auf, und bemerkt die ihnen entsprechende Anzahl Grade und Minuten: so hat man zugleich die Anzahlen von Graden und Minuten der Bogen AKB, BDC, AFC; deren Hälften die Maße der Winkel ACB, BAC, ABC geben. Wenigstens werden auf diese Art die spizen Winkel des Dreyeks ohne Zweydeutigkeit bestimmt.

§. 10.

Da die Hälften von Größen sich verhalten wie die ganzen (El. V, 15.): so lassen sich (El. V, 11.) statt der

§. 7. angegebenen Proportionen AB : BC : AC = ab : bc : ac, oder ſtatt des Sazes: daß die Seiten eines Dreyeks ſich verhalten wie die Chorden der doppelten Bogen, welche die gegenüber liegende Winkel des Dreyeks meſſen, die Proportionen AB : BC : AC = ½ab : ½bc : ½ac, oder der Saz ſezen: daß die Seiten eines Dreyeks ſich verhalten wie die halben Chorden der doppelten Bogen, welche die gegenüberliegende Winkel des Dreyeks meſſen. Dieſe halbe Chorden pflegt man die Sinus der Winkel zu nennen. Daher der Saz: die Seiten eines jeden geradlinigten Dreyeks verhalten ſich wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel.

§. 11.

Unter Sinus eines Winkels verſteht man alſo die Hälfte der Chorde, welche in einem gegebenen oder beliebig angenommenen Kreis einen Bogen umſpannt, der das Doppelte desjenigen Bogens iſt, welcher den Winkel mißt: namentlich der sin. ACB in dem Kreis AKBDCF iſt, ½AB
in dem Kreis akbdcf aber, ½ab
der sin. BAC in dem Kr. AKBDCF iſt ½BC
in dem Kr. akbdcf aber ½bc
der sin. ABC in dem Kr. AKBDCF iſt ½AC
in dem Kr. akbdcf aber ½ac.

Werden die Winkel von dem Umfang an den Mittelpunkt des Kreiſes verſezt: ſo ſtellt das Perpendikel EF, welches aus dem Endpunkt E des nach Belieben von des Winkels einem Schenkel CB abgeſchnittenen Halbmeſſers CE auf den andern Schenkel CA gefällt wird, den Sinus des Winkels ACB (ſo wie des denſelben meſſenden Bogens DE) für dieſen Halbmeſſer CE, oder in dem mit dieſem Halbmeſſer beſchriebenen Kreiſe dar. Wird nemlich dieſes Perpendikel EF verlängert, bis es den Umfang wiederum in dem Punkt G ſchneidet: ſo halbirt der Halbmeſſer CD, der auf dieſe Art auf der Chorde EG ſenkrecht iſt, ſowohl die Chorde EG ſelbſt als auch ihren Bogen EDG (El. III, 3. 26.); und EF iſt mithin die Hälfte der Chorde EG, welche den

Fig. 7.

Bogen EDG umspannt, der das Doppelte des Bogens ED ist, welcher den Winkel ACB mißt.

Ebenso ist ef der Sinus des nämlichen Winkels ACB, oder des ihn messenden Bogens de, für den Halbmesser Ce. (*)

Der Ausdruk, **Sinus eines Winkels**, bezieht sich also nicht auf eine gewise bestimmte Länge; so wie auch die Anzahl der Grade eines Bogens die Länge desselben nicht bestimmt. Sondern da die Dreyeke CEF, Cef ähnlich sind (VI, 5.); so ist EF : ef = CE : Ce

oder verwechselt EF : CE = ef : Ce.

Das heißt: die verschiedenen Sinus eines und desselben Winkels verhalten sich wie die Halbmesser der Kreise, zu welchen sie gehören; ebenso wie die Chorden (§. 9.): und für einen und denselben Winkel ACB hat jeder Sinus zu seinem Halbmesser einerley Verhältniß; EF das nämliche zu CE, wie ef : Ce: ebenso wie die Bogen verschiedener Kreise, welche einen und denselben Winkel messen, einerley Verhältniß zu ihren Umkreisen haben, (El. VI, 33. Schol. 2.). Wie mithin einen Winkel nicht die Länge des aus seiner Spize zwischen seinen Schenkeln beschriebenen Bogens, sondern das durch die Anzahl der Grade des Bogens ausgedrükte Verhältniß des Bogens zu seinem Umfange mißt, als welches das Verhältniß des Winkels zu vier rechten Winkeln angiebt; ebenso bestimmt einen Winkel nicht die Länge des Sinus, sondern das Verhältniß desselben zu seinem Halbmesser: und umgekehrt.

§. 12.

Aus dem so eben bewiesenen Saz, daß die Sinus eines und desselben Winkels sich verhalten wie die Halbmesser, zu welchen sie gehören; d. h. daß

(*) Ihrer senkrechten Lage auf den Halbmessern CD, cd wegen heissen EF, ef auch die sinus recti des Winkels ACB, oder der Bogen DE, de, für jene Halbmesser; im Gegensaz von DF, df, welche die sinus versi, Quersinus, des Winkels ACB, oder der Bogen DE, de, für eben dieselbe Halbmesser genannt werden. Vgl. die Anmerk. zu §. 43.

Fig. 8. sowohl EF : ef = CE : Ce = CD : Cd
als auch LK : lk = CL : Cl = CD : Cd
folgt ferner (El. V, 11.) daß EF : ef = LK : lk
und verwechselt EF : LK = ef : lk ;
d. h. daß die zu irgend einerley Halbmesser gehörige Sinus zweyer Winkel sich verhalten wie die Sinus eben dieser Winkel für irgend einerley andern Halbmesser.

§. 13.

Da nun in dem um ein Dreyek beschriebenen Kreis die Hälften der Seiten des Dreyeks die Sinus der gegenüberligenden Winkel sind; als Hälften der Chorden der doppelten Bogen, welche diese Winkel messen (§. 11.): so geben die gegenseitigen Verhältnisse der Hälften dieser Seiten überhaupt die Verhältnisse an, welche die auf einerley Halbmesser bezogenen Sinus der gegenüberligenden Winkel des Dreyeks zu einander haben (§. 12.). Die Hälften der Seiten verhalten sich aber wie die Seiten selbst. Folglich haben auch die Seiten eines Dreyeks beständig dasselbe Verhältniß zu einander, wie die Sinus der gegenüberligenden Winkel für irgend einerley Halbmesser. So ergiebt sich der Saz §. 10. aus der Betrachtung der Sinus selbst.

§. 14.

Wahrscheinlich sind es die arabischen Mathematiker, welche statt der Chorden der doppelten Bogen, die die Winkel messen, den Gebrauch ihrer Hälften, oder der Sinus der Winkel, in den trigonometrischen Calcul eingeführt haben. Wenigstens steht die erste bis jezt zuverlässig bekannte Anweisung zu dieser Aenderung in dem zu Nürnberg 1537. mit einigen andern mathematischen Schriften, und einzeln zu Bologna 1645, nach der von Plato Tiburtinus (a) in dem zwölften Jahrhundert verfertigten lateini-

(a) Wohl dem nämlichen, von welchem Montucla T. I. p. 503. berichtet, er habe Theodosii Sphærica um das J. 1120. aus dem Arabischen ins Lateinische übersezt: Platon de Tivoli traduisit de l' Arabe les Spheriques de Theodose vers l' an 1120. Son Latin est à la verité presque barbare

ſchen Ueberſezung gedruckten Werk De motu oder De scientia stellarum (b) des Ptolemäus der Araber, Moham-

(ſo wie auch das in der Ueberſetzung des Albatenius); mais tel etoit celui de son siecle. Cette traduction infiniment rare ne fut imprimée qu'en 1518. Scheibel (Einleit. zur math. Bücherkenntn. III. B. 14. und 15. St. S. 89.) führt dieſe Ausgabe nach Fabricius unter dem Titel an: Theodosii Sphærica Lat. interprete Platone Tiburtino. Venet. 1518.

(b) Capitul III. p. 6. sqq. S. Käſtners geom. Abh. I. Samml. S. 336. ff. Geſch. d. Math. I. B. S. 520. ff. wo auch ein Stük dieſes Capitels wörtlich eingerükt iſt.

Montucla T. I. p. 373. sq. meldet zwar, aber ohne beſtimmte nähere Angabe: es ſey in Bibliotheken ein Werk über die Sinus von Alfergan vorhanden, deſſen Zeitalter er (p. 360. sq.) in die erſte Hälfte des neunten Jahrhunderts ſezt; und unter andern Arabern habe auch Jahia Ben Mesva, ein Zeitgenoſſe des Kalifen Almamon, welcher von 813 bis 833. regierte, über die Sinus geſchrieben: Les Arabes simplifierent encore la pratique des opérations trigonométriques, en employant les sinus des arcs au lieu des cordes des arcs doubles, dont les anciens se servoient. Ce fut meme une de leurs premieres inventions. Car on la trouve dans Albatenius: & il y a aussi dans les bibliotheques un Traité d'Alferganus sur les sinus droits; sujet, sur lequel plusieurs autres Arabes ecrivirent, comme Jahia Ben Mesva, contemporain d'Almamon. Vorher (p. 361.) nennt Montucla nur folgende Schriften von Alferganus: Alferganus composa des Elemens d'Astronomie — Il traita aussi des horloges solaires & de l'astrolabe; ouvrages, qui se trouvent dans quelques bibliotheques riches en manuscrits. Eine lateiniſche Ueberſezung der erſten unter dem Titel: Rudimenta astronomiæ Alfergani iſt das erſte Stük der obenerwähnten zu Nürnberg 1537. gedruckten Sammlung; darinn kommt aber nichts von trigonometriſchen Berechnungen vor. Von den lezteren gibt Golius in der erſten Note zu ſeiner Arabiſchen und Lateiniſchen Ausgabe der Rudim. Astron. (Amstel. 1669.) folgende Nachricht: Alfergan us edidit adhuc librum de Sciatericis; ut Abulfergius, Ibn costa, aliique testantur: alium, ut Muveidinus Afer in libro de astronomorum erratis refert, commentarium scripsit absolutum & didacticum de Astrolabii descriptione & usu. Von der Lebenszeit des Alferganus aber bemerkt er ebendaſelbſt: De ætate illius haud quicquem certi compertum habeo, nisi quod Abulfergius conjecturæ proba-

bili locum facit, quod Alferganum inter alios mathematicos refert, qui circa Almamonis tempora scripserunt — Certe Almamonis observata auctor ipse refert Cap. V. (§. VIII. Rudiment.) Et Ibn Jonis Aegyptius in Tabulis Hakimicis (quas Hakimo Aegypti regi condidit & dicavit), ubi de maxima solis declinatione disserit, observationem Almamonis refert ex Alfergani Astrolabio, acsi ille inter primos fuisset, qui illam vulgasset. At Ibn Jonis illa scripsit, ut ex pluribus ejus libri locis patet, circa annum Christi 1000. Quare hoc saltem indubitatum fuerit, Alferganum intermedio vixisse tempore.

Halley ſagt in dem dem erſten Saz des III. Buchs der Sphæric. Menelai (S. §. 8. Note d.) beygefügten Scholion (p. 81.): Vocem נכחות, qua significat Hebræus interpres subtensam arcus dupli, sive την ὑπο την διπλην της προσφορικης apud Ptolemæum, ubique sinum reddidimus; nostri ævi mathematicis morem gerentes, & exemplo traductoris Arabis, semper vocem جيب, hoc est, sinum adhibentis. Rationes enim eædem sunt sinuum, quæ subtensarum duplorum arcuum, inter se. Das angeführte arabiſche Wort, mit lateiniſchen Buchſtaben dschaib geſchrieben (Käſtners Geſch. d. Math. I. B. S. 523.) iſt das nämliche, welchem Golius (Lexic. Arabico-Lat. Amstel. 1653. p. 560.) dſe Bedeutungen, Sinus indusii vestisque, seu collare ad jugulum patens; & Sinus apud geometras, i. e. semissis rectæ circulo inscriptæ, a diametro per medium sectæ, zuſchreibt; von dem Stammwort dschaba, secuit, formandi sinus ergo indusium fidit, dilatavit. Coſtard führt in ſeiner Vorrede (p. VI.) nur an: Duo sunt codices Mss. in Archiv. Selden. A. No. 5. & 6. versiones arabicas Menelai complexi; ohne weitere Nachricht von denſelben zu geben. Und, die Hebräiſchen Ueberſezungen betreffend, meldet er (p. III. V.): Sciendum est, in instructissima bibliotheca Bodleiana servari duos codices Hebraicos manuscriptos, quorum unus in catalogo est Hunting. 6303. 557. Continet — Menelai Sphæricorum Libri I. partem. Definit enim in Prop. 33. — Titulum præ se fert:

ספר מילאוס בתמונות הכדוריות העתקת ר' אקחק בן חנין i. e. Codex Menelai de figuris sphæricis ex versione R. Isaaci filii Honaini — Codex alter, & quo, indiciis quibusdam inductus, unum præcipue Halleium credo, est in catalogo Hunting. 6270. 524. & continet Theodosium, Menelaum, Thabetem Ebn Korra, & Ebn Aphla, de Sphæricis. Des vorhin genannten Ueberſezers Vater, Honain Ebn Isaac, war in der zweyten Hälfte des neunten

Jahrhunderts berühmt, und starb 877. (Hist. compendiosa Dynastiarum, auctore Gregor. Abul-Pharajo. Arabice edita & Latine versa ab Ed. Pocockio. Oxon. 1663. p. 171. sqq. Gregor. Abulpharagii sive Bar-Hebraei Chronicon Syriacum. Lips. 1789. p. 173. sqq.): so war jener ein Zeitgenosse von Albatenius. Costard vermuthet (p. IV.): er habe nicht unmittelbar aus dem Griechischen, sondern aus dem Arabischen oder Syrischen ins Hebräische übersezt.

Maurolycus hat in seiner Ausgabe des Menelaus (S. I. 8. Note d) auch überall Sinus, wie Halley; und bemerkt darüber in der Vorrede (p. 204. sq.): Ante Menelai lectionem hæc prælibanda duximus. Nadir arcus cujuspiam esse rectam sive chordam, quæ duplo ipsius arcus subtenditur; sinum rectum alicujus arcus esse dimidium ipsius nadir, seu chordæ dupli ejusdem arcus. Unde manifestum est: quod, quicquid Menelaus de ipsis nadir arcuum demonstravit, idem de sinibus, & e contrario, concludi potest. Ptolemæus quoque, Menelaum secutus, chordam dupli propositi arcus in demonstrationibus accipit. Nos autem, Jo. de Monteregio & Georg. Peurbachium imitati, pro chorda dupli sinum ipsius arcus, brevitati consulentes, consideramus; quandoquidem utrobique demonstratio est eadem. Hr. Hofr. Kästner äussert hiebey: diese Bedeutung des Worts Nadir sey sonst unbekannt (Geom. Abh. II. Samml. S. 361. Gesch. d. Math. I. B. S. 520.).

In der Lateinischen Uebersezung des Albatenius kommt das Wort Sinus nur einmal vor Cap. III. p. 7. b. d. Nürnb. Ausg: Si autem per has cordas versus arcus scire desideres; si chorda, quam habueris, minus 60 fuerit, eam de 60 minue; & residui arcum scito; quem de 90 minue; & quod residuum remanserit, erit arcus sinus versi. Was besonders nun schlechtweg Sinus, oder Sinus recti im Gegensaz von Sinus versi, heissen; und anfangs in jener Uebersezung durch medietas, dimidium cordæ duplicitatis arcus bezeichnet wird: heissen in derselben nachher immer cordæ mediatæ, medietatis, auch schlechtweg cordæ, im Gegensaz von cordæ integræ, oder perfectæ; mit der hierüber l. c. p. 7. vorausgeschikten allgemeinen Erinnerung: Ne in sequentibus hæc nobis iterare necesse sit, edicimus, omnem tractatum nostrum sive mentionem cordarum de medietatis cordis oportere intelligi, nisi aliquo proprio nomine signaverimus, quod & cordam integram appellabimus, unde frequentius non multum indigemus. So werden in der folgenden Beschreibung der dem Werk von dem Verf. beygefügten, in beyden gedrukten Ausgaben aber fehlenden Tafel der halben Sehnen von 30 zu 30 Minuten, und ihres Gebrauchs, die

med Al Batani, gewöhnlich Albatenius genannt (c), der zu Ende des neunten und zu Anfang des zehnten Jahrhunderts unserer Zeitrechnung lebte (d).

Ausser andern Vortheilen hatte diese Aenderung die Bequemlichkeiten zur Folge: daß man der Mühe die gegebenen Winkel zu verdoppeln, und die in der Chordentafel gefundene zu halbiren überhoben; und daß die Tafel, welche vorher auf einen Halbkreis ausgedehnt werden mußte, nun auf einen Quadranten eingeschränkt wurde (e).

Tafel selbst Tabula cordarum; und die darin aufzusuchenden halben Sehnen, schlechtweg cordæ genennt. Und im Cap. X. p. 14. wird die Regel, aus der gegebenen Sonnenhöhe und Länge des Stabs die Länge des Schattens zu finden, so ausgedrükt: Cum per altitudinem umbram scire uolueris; altitudinis, & illius altitudinis, quod ei ad perficiendum 90 deficit, chordam scito; post hoc cyotheri partes ad libitum pone, & in eas perfectionis altitudinis chordam multiplica; quodque fuerit, per altitudinis chordam partire. Quod autem exierit, erit quantitas extensionis umbræ in superficiei terræ planicie ex quantitatibus cyotheri partibus attributis. Hr. Kästner folgert hieraus (Geom. Abh. I. Samml. S. 530. Gesch. d. Math. I. B. S. 522. f.): Albatenius habe die halben Sehnen noch nicht mit einem eigenen Namen belegt; und dieses so, wie die Umständlichkeit seiner Anweisung zu ihrem Gebrauch, bestätige die Vermuthung, daß er denselben zuerst gelehrt habe. Vgl. S. 71. Note b.

(c) Weidleri Hist. Astron. p. 210. Montucla Hist. des Math. T. I. p. 362. sqq. Bailly Gesch. der neuern Astron. II. B. S. 16. ff.

(d) Seine in seinem Tract. de scient. stellar. angeführte Beobachtungen fallen in die Jahre 879. 882. 883. 891. 901. nach C. G. (Hist. coelest. p. XXXII. sq.) Und nach Abul-Pharaji Hist. compend. Dynast. p. 191. ist er im J. 929. gestorben.

(e) Jene giebt Albatenius selbst als Beweggrund seines Verfahrens an (p. 6. b.): Hic est, qua (sic) utimur in numerorum maneriis, ne in his, in quibus opus fuerit, arcus duplicare necesse sit. Und diese bemerkt er (p. 7. b.): Ad harum mediatarum chordarum noticiam sufficit — earum ab uno gradu usque ad 90 protensio. Nam illius chordæ, quod excedit 90 usque ad 180, est ut chorda de 90 conversim.

Der Sinus eines ſtumpfen Winkels iſt nämlich dem Sinus ſeiner Ergänzung (Supplements) zu zwey rechten gleich. Denn nach der erſten Definition (§. 10. 11.) iſt der Sinus eines Winkels von 100° z. B. die Hälfte der Chorde eines Bogens von 200°. Aber die Chorde von 200° iſt einerley mit der Chorde von 160°. Folglich iſt der Sinus eines Winkels von 100° die Hälfte der Chorde von 160°: welche, nach ebendieſer Definition des Sinus, auch der Sinus von 80°, d. h. der Sinus des Supplements des Winkels von 100° iſt.

Nach der andern Definition (§. 11.) iſt der zu dem beliebig angenommenen Halbmeſſer CE gehörige Sinus des ſtumpfen Winkels ACB (*Fig.* 9.) das Perpendikel EF, welches aus dem Endpunkt E des von dem Schenkel CB abgeſchnittenen Halbmeſſers CE auf den andern, in dieſem Fall gegen H zu verlängernden Schenkel gefällt wird. Nach ebendieſer Definition aber iſt ebendieſes Perpendikel gleichfalls der Sinus des ſpizen Winkels BCH, der mit dem ſtumpfen Winkel ACB zwey rechte macht. Vollendet man den Kreis und verlängert das Perdendikel EF, bis es ihn wiederum in G trift; ſo iſt überhaupt nach der erſten Definition EF der Sinus des ſtumpfen Winkels ACB, als Hälfte der Chorde EG, welche den Bogen EDG umſpannt, der das Doppelte des Bogens ED iſt, welcher den Winkel ACB mißt; und ebendieſes Perpendikel EF iſt gleichfalls der Sinus des Nebenwinkels BCH von ACB, als Hälfte der Chorde EG, welche den Bogen EHG umſpannt, der das Doppelte des dieſen Winkel BCH meſſenden Bogens EH iſt.

§. 15.

Aus beyden Definitionen des Sinus (§. 11.) erhellt ferner: daß der Sinus des rechten Winkels, oder von 90°, der Halbmeſſer des willkührlich aus der Spize des Winkels beſchriebenen Kreiſes ſey. Da nun der Durchmeſſer des Kreiſes ſeine gröſte Chorde iſt (El. III, 15.): ſo iſt auch der Halbmeſſer die gröſte halbe Chorde; d. h. der Sinus des rechten Winkels iſt größer als der zu demſelben Halbmeſſer gehörige Sinus irgend eines andern Winkels.

§. 16.

Die Sinus der schiefen Winkel können also als Theile des Sinus des rechten Winkels angesehen werden: daher heißt dieser gewöhnlich der ganze Sinus (Sinus totus); und wird als die Einheit betrachtet, in deren Theilen die Sinus der übrigen Winkel durch ächte Brüche genau, (welches aber nur bey einem einigen statt hat), oder innerhalb gewisser Gränzen genähert, ausgedrükt werden. Alsdenn verhält sich der Sinus eines jeden Winkels zum Halbmesser oder Sinus totus, genau oder beynahe wie der Zähler des diesen Sinus bezeichnenden Bruchs zu seinem Nenner. So ist:

sin. 30° = ½ chord. 60° = ½ Halbm. oder = ½ sin. tot. genau;

sin. 45° = ½ chord. 90° = ½√2 Halbm. = 17/24 Halbm. oder = 17/24 sin. tot. beynahe:

Daher sin. 30° : Halbm. oder sin. tot. = 1 : 2 genau

sin. 45° : Halbm. oder sin. tot. = 17 : 24 beynahe.

Giebt man allen Brüchen, durch welche das Verhältniß der Sinus der schiefen Winkel zu dem Sinus totus ausgedrükt wird, einerley Nenner; d. h. nimmt man den Halbmesser beständig in dieselbe Anzahl gleicher Theile getheilt an: so verhalten sich die Sinus jeder zwey Winkel, wie die Zähler der Brüche, durch welche sie ausgedrükt werden. So verhält sich z. B.

sin. 45° : sin. 30° = 17 : 12 beynahe.

Die Alten gaben dem Durchmesser 120, folglich dem Halbmesser 60 gleiche Theile; theilten ferner jeden dieser Theile, nach einer bey den Graden der Kreisbögen gebräuchlichen Eintheilung und Benennung, in 60 Minuten; jede von diesen in 60 Sekunden; und drukten anfangs die ganzen Chorden, hernach auch ihre Hälften in Theilen, Minuten und Sekunden des Halbmessers aus. (Ptolemäus und Albatenius an den oben angef. O.) Diese unbequeme Sexagesimaleintheilung der Theile des Halbmessers schafte der berühmte Wiederhersteller der Astronomie Georg Peur-

bach (a) um die Mitte des 15. Jahrhunderts nach C. G. ab; und berechnete, unter der Voraussezung des Sinus totus von 600000 Theilen eine neue Sinustafel von zehen zu zehen Minuten (b). Peurbachs Schüler, ein eifriger Fort-

(a) Geboren 1423. zu Peurbach an der Gränze von Oesterreich und Baiern; gestorben zu Wien 1461.

Von seinen Verdiensten um die Astronomie s. Gassendi Opp. Florent. 1727. Tom. V. Georg. Peurbachii & Jo. Mülleri Regiomontani vita (besonders mit den Lebensbeschreibungen von Tycho und Copernicus herausgegeben zu Paris 1654.) p. 459. sqq. Weidleri Hist. astron. p. 298. sqq. Montucla Hist. des Math. T. I. p. 538. sqq. Bailly Gesch. d. neuern Astron. II. B. S. 187. ff. 229. ff.

(b) Tanstetter, Prof. d. Astron. zu Wien, führt in dem daselbst 1514. herausgegebenen, in Kästners Gesch. d. Math. II. B. S. 526. ff. beschriebenen Werk: Tabulæ Eclypsium Magistri Georgii Peurbachii. Tabula primi mobilis Joannis de Monteregio. Indices præterea monumentorum, quæ clarissimi viri Studii Viennensis alumni in Astronomia & aliis mathematicis disciplinis scripta reliquerunt — unter der lezten Rubrik an: Georgius ex Peurbach — Scripsit hic celeberrimus vir varia opuscula & præclarissima. Sed quæ ad nostram noticiam pervenere, diligentia D. Andreæ Stiborii conquisita, sunt hæc — Nova tabula sinus de decem minutis in decem, per multas millenarias partes, cum usu; quæ plurimarum rerum novarum in astronomia occasio fuit.

In der von Joh. Stabius zu Nürnberg 1516. fol. herausgegebenen Schrift: Quadratum geometricum præclarissimi Mathematici Georgii Burbachii, welche auch einer von Joh. Schoner zu Nürnberg 1544. in 4. veranstalteten Sammlung einiger astronomischen Schriften von Regiomontanus (S. Note d.) beygefügt ist, bezieht sich Peurbach auf eine von ihm berechnete Sinustafel für den Halbmesser 600 000. Die Seiten BC, CD des Quadrats ABCD (Fig. 10.) sind jede in 1200 gleiche Theile getheilt. AE ist ein um A bewegliches mit Dioptern versehenes Lineal. Eine Tafel p. 5—9. giebt für jede Länge des Stüks BN von 1 bis 1200 die Größe des Winkels BAN in Graden, Minuten und Secunden an. Und p. 10. sagt Peurbach: Hujus quidem tabulæ compositio hæc fuit. Numerum partium propositarum (rectæ BN) multiplica in se, & productum junge cum quadrato de 1200 — et aggregati ex eis quære radicem quadratam; eam serva pro divisore: deinde numerum partium propositarum duc

fezer der Unternehmungen seines Lehrers, Johannes

in sinum totum, quem in tabulis meis suppositum habeo 600000; & quod exit, divide per divisorem servatum, & exit sinus arcus quæsiti. Cujus quidem sinus arcum quæras per tabulas suas; & eum arcum scribe in directo numeri partium propositarum. Exemplum: numerus partium propositarum sit 600. Hæc multiplico in se, & fiunt 360000; quibus conjungo 1440000; proveniunt 1800000. Hujus producti quæro radicem quadratam; & est 1341, & sexcentæ quadraginta una millesimæ fere. Item numerum partium propositarum, scilicet 600, duco in sinum totum 600000; fiunt 360000000. Hæc divido per 1341 & sexcentæ & quadraginta una millesimæ — proveniunt 268328. Hujus arcus reperitur in tabulis sinuum gra. 26, minuta 33, secunda 55. Hunc igitur arcum scripsi in præsenti tabula in directo partium 600.

Peurbach giebt in dieser Schrift nicht an, wie er die Bogen in seiner Sinustafel wachsen ließ. Hr. Kästner (Gesch. d. Math. I. B. S. 537.) vermuthet, durch einzelne Minuten; damit ihm Proportionaltheile die Secunden richtig angegeben haben: bemerkt aber, daß in den Exempeln, welche er (auf dem kürzern Wege, durch Logarithmen von Tangenten) nachgerechnet habe, Peurbachs Tafel jedesmal eine Secunde mehr angebe, als er finde; vielleicht weiß Peurbach bey der Ausziehung der Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate von AB und BN allemal bey Tausendtheilen stehen geblieben, folglich sein Divisor immer zu klein gewesen. Wirklich giebt für BN = 600 die Rechnung mit Logarithmen von Tangenten den Winkel BAN nur = 26° 33′54″,2. Peurbachs Divisor 1341,641 ist aber hier nicht zu klein, indem $\sqrt{1800000} < 1341{,}6408$. Und der seinem Sinus 268328 für den Halbmesser 600000 entsprechende Winkel BAN wird nach Regiomontans Sinustafel für den Halbmesser 6000000 (S. Note d) gefunden = 26° 33′54″,2: man mag die Secunden durch Proportionaltheile zwischen sin. 26° 34′ = 2683433 und sin. 26° 33′ = 2681872 oder zwischen sin. 26° 40′ = 2692795 und sin. 26° 30′ = 2677187 suchen. Für BN = 100 giebt die Rechnung durch Logarithmen von Tangenten (Kästners Anf. Gr. der Arithm. Geom. Trigon. 4te Aufl. S. 454.), wie die nach Peurbachs Vorschrift geführte mittelst Proportionaltheilen sowohl zwischen sin. 4° 46′ und sin. 4° 45′, als zwischen sin. 4° 50′ und sin. 4° 40′, den Winkel BAN = 4° 45′49″; wie er in Peurbachs Tafel steht. So geben auch für BN = 1 die drey Rechnungsarten den Winkel BAN =

Müller (c), von seinem Geburtsort gewöhnlich Regio-

2'51",9; welchen Peurbach 2'52" sezt. In Kästners geom. Abh. I. Samml. S. 341. ist der Tafellogarithme seiner Tangente zu sezen 6,9208188 statt 6,92045209; und in Regiomontans Sinustafel ist sin. 3' = 5236 zu lesen statt 5336. Für BN = 1151 hat Peurbach BAN = 43° 48'22"; und die drey Rechnungsarten geben 21",2 (in Kästners Gesch. d. Math. I. B. S. 534. steht irrig 23"); 21",4; 21",5. So scheint Peurbachs Tafel für sein geometrisches Quadrat unentschieden zu lassen, ob in seiner Sinustafel die Winkel durch einzelne Minuten, oder nur von 10 zu 10 Minuten, wie Tanstetter angiebt, gewachsen seyen.

Gassendus (p. 460.), Weidler (p. 299.), und Bailly (S. 230.) schreiben Peurbachen eine von 10 zu 10 Minuten fortgehende Sinustafel für den Halbmesser 6 000 000 zu; und der erste sagt: Peurbachius alia inter excogitavit condiditque novam sinuum tabulam, per minuta dena procedentem, ac sinu toto partium 6 000 000 supposito; quam deinceps Regiomontanus per minuta singula extendit. Præmisit vero illi Peurbachius Tractatum de sinibus & chordis inscriptum; brevem illum quidem, sed qui primus tamen occasionem fecit perficiendi sensim rationem trigonometrici calculi. Diese Abhandlung hat zwar Schoner 1541. herausgegeben (s. Note d. und Kästners Gesch. d. Math. I. B. S. 540. ff.): aber ohne Peurbachs Sinustafel; deren auch in der Abhandlung selbst keine Erwähnung geschieht.

In Joannis de Monteregio et Georgii Peurbachii Epitome in Cl. Ptolemæi Magnam compositionem (Nürnb. 1543. Von der ersten Ausgabe, Venedig 1496. s. Scheibels Einleit. zur mathemat. Bücherkenntniß. III. B. 13 und 14. St. S. 38. ff. Kästners Gesch. d. Math. II. B. S. 520. ff.), wovon Peurbach noch die sechs ersten Bücher kurz vor seinem Tode ausgearbeitet hat (s. Regiomontans Zueignungsschriften der Epitome und seines Werks De triangulis), und worin sonst die Ptolemäische Sexagesimalrechnung beybehalten ist, schließt Lib. V. Prop. XVII. p. 97. mit der Bemerkung: Suadeo tamen in hoc opere, ut lineas — AE, ED, DB, BL in his numeris teneas; scilicet AE 60 000, ED 10317, DB vel DA 49683, BL 5250; & in his agas propter vitare fractionum multitudinem. Vorher (Lib. V. Prop. VI. p. 89. und Lib. IV. Prop. IX. p. 75.) waren sie angegeben: DA 49 part. 41^{min}; ED 10 part. 19^{min}; BL 5 part. 15^{min}, quibus AE est 60.

(c) geboren 1436. zu Königsberg in Franken; gestorben zu Rom 1476.

montanus genannt, dehnte die Sinustafeln auf einzelne Minuten aus; welche er erstlich für den Halbmesser = 6000000, hernach auch für den Halbmesser = 10000000 berechnete (d). Um die nämliche Zeit hat auch der Ferrari

Von seinen ausgebreiteten mathematischen Kenntnissen und grossen Verdiensten besonders um die Astronomie s. Oratio de Jo. Regiomontano — recitata ab Erasmo Rheinholdt, Salveldensi, Mathematum Prof. in den Select. Declamat. Melanthonis, quas conscripsit, & partim ipse in Schola Vitebergensi recitavit, partim aliis recitandas exhibuit (Tom. III. Argentor. 1562. p. 290. sqq.); Gassendi Opp. T. V. p. 462. sqq.; Doppelmayrs historische Nachrichten von den Nürnbergischen Mathematicis und Künstlern (Nürnb. 1730. S. 1. ff.); Weidler p. 304. sqq.; Montucla T. I. p. 541. sqq.; Bailly II. B. S. 191. ff. 234. ff.; Kästners Gesch. d. Math. II. B. S. 319. ff. 520. ff.

(d) Beyde stehen in der von Joh. Schoner zu Nürnberg 1541. fol. herausgegebenen Sammlung: Tractatus Georgii Peurbachii super propositiones Ptolemæi de sinubus & chordis. Item Compositio tabularum sinuum per Joannem de Regiomonte. Adjectæ sunt & Tabulæ sinuum duplices per eundem Regiomontanum. Omnia nunc primum in utilitatem astronomiæ studiosis impressa; welche Hr. Hofr. Kästner in s. geom. Abh. I. Samml. S. 543. ff. II. Samml. S. 361. ff. Gesch. d. Math. I. B. S. 540. ff. umständlich beschreibt.

Seiner Compositio tabularum sinuum schikt Regiomontanus folgenden Vorbericht voraus: Fecere majores nostri sinus & chordarum tabulas, quorum usus maxime necessarius est certas aliarum tabularum numerationes reddere volenti. Verum omnes illi diametrum circuli paucarum admodum partium constituerunt, veluti Ptolemæus 120, Arzahel 300, unamquamque partium in 60 minuta, minutumque in 60 secunda distinguentes. In arcu etiam tantum per quartam gradus lineam numerum in sinubus auxerunt: propter quod fit, ut, cum ex arcu sinum, aut e contra ex sinu arcum elicere velimus, semper necesse sit sumere partes proportionales; itemque in usu sinuum partes in minuta, minutaque in partes reducere. Quod profecto nedum parum in arte numerandi instituto, sed etiam peritissimis tædium parit. Ut igitur hoc impedimentum tolleretur, facilisque fieret sinuum inventio: conatus sum novas tabulas facere, quarum extensio in arcu per singula minuta procederet; ipsamque circuli semidiametrum, quæ sinus totus

ſche Aſtronom Joannes Blanchinus Sinustafeln für

est, ne amplius aliqua subdivisione opus esset, 6000000 partium fore supposui. In den ſeinen Säzen beygefügten Anwendungen ſezt er den Sinus totus 600 Milliquen, und giebt die nach der Vorſchrift jener Säze berechnete Sinus in ſolchen Theilen an; mit der Bemerkung zu Ende des 2ten Sazes: Præsupposui autem in inventione horum sinuum, propter majorem præcisionem, semidiametrum circuli partes habere 600000000, & secundum hoc, repperi sinus arcuum illorum; und in der Anwendung des 6ten Sazes: Licet in inventione sinuum per augmentum 45 minutorum in arcu procedendo supposuerimus sinum totum esse 600000000 propter præcisionem inventionis; in tabulando tamen supponemus eum esse nisi 6000000, quod id sufficiat. Der Berechnung des Sinus für den Halbmeſſer 10000000 erwähnt Regiomontanus in dieſer Compositio tabularum sinuum nicht.

Regiomontans Abſicht war ſeine Sinustafel für den Halbmeſſer 6000000 ſeinem Werk De triangulis beyzufügen; welches aber auch erſt lang nach ſeinem Tode, und nun ohne jene Tafel, dagegen mit einer andern Zugabe, von Joh. Schoner zum Druk befördert wurde, unter dem Titel: Doctissimi viri — Joannis de Regiomonte de Triangulis omnimodis Libri quinque — Accesserunt huc in calce pleraque D. Nicolai Cusani de quadratura circuli, deque recti ad curvi commensuratione: itemque Jo. de Monteregio eadem de re ἀλγόριτμα — Omnia recens in lucem edita fide & diligentia singulari. Norimb. 1533. fol. (S. Käſtners Geſch. d. Math. I. B. S. 572. ff.) In der Zueignungsſchrift von jenen ſagt nämlich Regiomontanus: Quamvis hosce triangulorum libellos post Epitoma (magnæ compositionis Ptolemæi) conscripserim, præpostero fretus ordine, posterius quidem opus texendo introductorium, quam artem ipsam tradiderim; nemini tamen triangulos nostros prætereunti astrorum disciplina satis agnoscetur. Quod si quispiam inique factum insimulet; is, nisi me animus fallit, jure acquiescet, ubi majorum parere monitis & æquum & bonum arbitrabitur. Sane moribundo præceptori morem gestum oportuit; qui, absolutis nuperrime sex luminarium libris, superstites septem Joanni suo reliquit; imo mandavit quam citissimum expediendos. (Vergl. die Zueignungsſchrift der Epitome) — Igitur jussa præceptoris capessenti mihi plurimus triangulorum & planorum & sphæralium incidit usus: quæ res jam pridem Georgio quoque in primis sex libris crebro occurrens animum induxit triangulorum artem conscribere. Verum, ut Epitomati finem, ita Triangulis dare initium Deus ipse vetuit; quo nunc

aspirante orbitam viri doctissimi, quoad potero, sectabor — Ad hæc demum accedit Tabulæ sinuum non minus utilis quam nova compilatio; quæ absque fastidio numerorum frangendorum, aut fractorum ad integros prolixa reductione, per sinum areus suos, ex arcuque sinum offert: præter ceteras ejus generis tabulas id quidem facilitatis habens, quod per singula minuta expanditur, quantumque uni secundo in quolibet tabulæ respondeat loco, discernitur (in einer besondern Columne); id autem certitudinis, quod sinus totus in ea sex milia millium particularum constituitur. Interdum vero primos duos quorumlibet numerorum characteres negligere non dabitur vicio, si exactissimam operis præcisionem parvi faciemus; quemadmodum cautionibus satis cautum est. So gebraucht Regiomontanus in den Beyspielen, welche er in dem Werk De triangulis seinen Lehrsäzen p. 25. sq. 111. 113. 115. 124. beygefügt hat, immer nur Sinus für den Halbmesser 60 000.

Die Art, wie Regiomontanus in den angeführten zwey Stellen von seiner Sinustafel und von den vor ihr vorhandenen spricht, ohne der Peurbachischen zu erwähnen, läßt vermuthen, daß ihm diese Arbeit seines Lehrers nicht bekannt gewesen sey (Kästners Gesch. d. Math. I. B. S. 550.)

Regiomontans Werk De triangulis war schon vor der Mitte des Jahrs 1463. ausgearbeitet. Eos, quos de triangulis conscripsi, libellos propediem uidebit dominatio uestra; jam autem apud me non sunt, sed ex Roma breui afferentur: schrieb Regiomontanus aus Venedig an den Ferrarischen Astronomen Jo. Blanchini in einem Brief, dem das Datum nicht beygesezt ist; worin er einen den 21 Nov. 1463. datirten Brief Blanchinis beantwortete. Dieser antwortete hierauf den 5. Febr. 1464 — Quæ non dubito in Tractatu uestro de triangulis demonstrata per uos doctissime sint. Cupio eum auiditate illum habere. (C. T. de Murr Memorabilia Bibliothecarum publ. Norimb. & Univ. Altdorfinæ. Pars I. Norimb. 1786. Epistolæ autographæ Jo. Blanchini & Jac. de Spira ad Jo. Regiomontanum, una cum hujus autographis responsionum conceptionibus ad Johannem Blanchinum, Mag. Christianum, Erfordiensem Mathematicum, & Jacobum de Spira, Astronomum Frederici Comitis Urbinatum, datarum. p. 74 — 205. Epist. II. p. 78. III. p. 90. sq. IV. p. 108. 112.) Regiomontans erster Brief an Blanchini, der sich auf eine Zuschrift desselben, welche Regiomontanus noch in Rom erhalten hatte, bezieht, ist aus Venedig vom 26. Jun. 1463. kurz nach seiner dortigen Ankunft von Rom. (l. c. Epist. I. p. 75. 77.).

In einem der von Schoner dem Werk De triangulis beygefügten Aufsäze über die Cirkelquadratur des Cardinals Cusanus (Käſtners Geſch. der Math. I. B. S. 403. ff. 477. ff. 573. ff.), welche Regiomontanus, den Unterſchriften der meiſten zufolge, in den Monaten Junius und Julius des Jahrs 1464. zu Venedig geſchrieben hat, beruft er ſich (p. 63. sq.) auf verſchiedene Säze ſeines erſten Buchs De triangulis; und in dem folgenden p. 67. sq., welchen er den 26. Jun. 1464. zu Venedig geendiget zu haben bemerkt (p. 82.), prüft er des Cardinals Vorſchrift ein gleichſeitiges Dreyek zu beſchreiben, deſſen Umfang der Peripherie eines gegebenen Kreiſes gleich ſey, durch eine Berechnung, bey welcher er mehreremal Sinus für den Halbmeſſer 60 000 gebraucht.

Abgekürzt für dieſen Halbmeſſer 60 000 iſt Regiomontans Sinustafel fünfzig Jahre vor der vollſtändigen für den Halbmeſſer 6000 000 herausgegeben worden als Anhang der zu Augſpurg von Erhard Ratdolt 1490. gedrukten Tabule directionū profectionūque famosissimi viri Magistri Joannis Germani de Regiomonte in nativitatibus multum utiles; ohne Erwähnung auf dem Titel des Werks, mit der beſondern Aufſchrift: Tabella sinus recti per gradus & singula minuta digisa. Ad tabulas directionū Mgri Johannis de regiomonte necessaria cum quibus exemplis ptes ejusdem tabelle multum concordant. (Scheibel a. a. O. S. 27. f.) Bey meinem Exemplar dieſer Ratdoltiſchen Ausgabe der Tab. direct. fehlt die Tabella sinus; ſo wie auch bey des Hrn. von Murr ſeinem (l. c. p. 91.). Hr. Scheibel aber ſagt nur (S. 28.): Meinem Exemplar fehlt das lezte (der 15 Blätter dieſer Tafel) für die Sinus rectos der andern Hälfte des 84—89ten Grades. Es beruht alſo auf Mißverſtändniß, wenn Hr. v. Murr ſagt: Tam exemplo amicissimi Dom. Scheibelii, quam meo ista folia 15 desunt. In den folgenden Ausgaben der Tabulæ directionum (Scheibel a. a. O. S. 60. 152. 15 und 16. St. S. 9. 30. IV. B. 18. St. S. 29. Käſtners geom. Abh. I. Samml. S. 547. ff. Geſch. d. Math. I. B. S. 556. ff. II. B. S. 537. ff.) iſt die Beyfügung der Sinustafel auf dem Haupttitel des Werks bemerkt. Zwey ältere Ausgaben deſſelben als die Ratdoltiſche, welche man angegeben findet (Scheibel III. B. 13 u. 14. St. S. 11. 18.), hält Hr. v. Murr für zweifelhaft (Hrn. v. Zach allg. geogr. Ephemer. IV. B. 4. St. S. 382.). Die früheſte ſoll Regiomontanus ſelbſt in ſeiner Drukerey zu Nürnberg „vor ſeiner lezten Abreiſe nach Italien um A. 1475.“ veranſtaltet haben. Doppelmayr, der dieſes a. a. O. S. 20 Note z. angiebt, und auf welchen insgemein zurükgewieſen wird, beruft ſich aber hiebey (S. 10. Note p.) nur auf eine Stelle in Thuani Hist.

Lib. 20: Regiomontanus prius editis Directionum tabulis Romam secundum profectus; nicht auf eigene Ansicht des Buchs; und der Titel: Ludus Pannoniensis, quem alias vocare libuit Tabulas directionum, unter welchem es angeführt wird, ist bloß aus dem von Regiomontanus zu Nürnberg 1474. herausgegebenen Indice librorum edendorum (Doppelmayr S. 20.) genommen. Die Aufschrift Ludus Pannoniensis bezieht sich auf das Land (Ungarn), in welchem Regiomontanus dieses Werk ausgearbeitet hat; wie aus folgender Stelle der Zueignungsschrift desselben an Johann Erzbischoff von Gran (für welchen auch Peurbach sein geometrisches Quadrat verfertiget hat) erhellet: Quantam & quam peremem curam habeas condendi Studii generalis, conclamatum esse jam pridem arbitror; cum ex universis litterarum consortiis omnium professionum doctissimos quosque viros accersere soleas, officio fretus regii Cancellarii supremi: cui cœpto felicissimo me quoque Viennensis Collegii alumnum quantumcunque adesse voluisti, docturum videlicet quadriviales facultates. Venienti igitur, voluntatique tuæ morem gesturo mihi inprimis id mandati dedisti, ut Tabulas quasdam directionum componerem, quæ & usu faciles & judicibus utiles essent. — Eas itaque primitias operum meorum suscipere digneris; quas ubi pro acumine ingenii tui probaveris, in publicum prodire jubeto. In der Ratdoltischen Ausgabe steht am Ende: Opus tabularum directionum profectionumque pro reverendissimo dno. archiepo. Strigonien. &c. per magistrum Joannem de Regiomonte compositar. Anno dni 1467. explicit feliciter. — Dieser Zeitbestimmung (welche die Hrn Scheibel und Kästner in ihren Beschreibungen späterer Ausgaben nicht erwähnen; die wenigstens in der Tübingischen 1559, und der Wittenbergischen 1606, welche ich vor mir habe, fehlt; und vielleicht bloß auf Mißverstand des Ausdruks: sit revolutio alicujus nativitatis 6 diebus 5 horis & 10 minutis Martii completis anno Christi 1467. currente, beruhet, den Regiomontanus in einer der Aufgaben, der 30ten, gebraucht, welche er zur Erläuterung der Anwendung seiner Tab. direct. denselben vorausgeschikt hat) widerspricht Doppelmayrs Nachricht (a. a. O. S. 5.): daß Regiomontanus erst gegen Ende des Jahrs 1468., nachdem er sieben Jahr lang (seit dem Herbst 1461.) in Italien zugebracht, nach Wien zurükgekommen sey; und nach einem nicht gar langen Aufenthalt sich von da nach Ungarn begeben habe. Unter Regiomontans astronomischen Beobachtungen in der von Schoner zu Nürnberg 1544. in 4. herausgegebenen Sammlung: Scripta clarissimi Mathematici M. Joannis Regio-

montani de Torqueto, Astrolabio armillari, Regula magna Ptolemaica, Baculoque astronomico, & Observationibus cometarum, aucta necessariis Joannis Schoneri Carolostadii additionibus. Item Observationes motuum solis ac stellarum tam fixarum quam erraticarum. Item Libellus M. Georgii Peurbachii de Quadrato geometrico; sind (fol. 42.) nach einer den 6. Octob. 1464. zu Rom gemachten Beobachtung vier andere vom 11. Dec. 1464., 19. Jun. 1465. 26 und 29 April 1468. ohne Anzeige des Beobachtungsorts angeführt: worauf fol. 42. b. sq. eine zu Gran den 15 März 1471; alsdenn die zu Nürnberg 1471 — 1475. angestellte folgen, deren erste auf den 2 Jun. 1471. und die lezte fol. 27. b. auf den 28. Jul. 1475. fällt. Vorher (fol. 27. und 36. sqq.) werden von ihm, ausser den drey den 3. Sept. 1457. zu Mölk in Oestreich, und den 3 Jul. und 27 Decemb. 1460. zu Wien gemeinschaftlich mit Peurbach angestellten Beobachtungen, eine noch zu Wien den 22 Jun. 1461; zehn im Decemb. 1461, Januar und März 1462. zu Rom; eilf im Julius, September, October und November 1462. zu Viterbo; und eine den 21. April 1464. zu Padua gemachte angegeben. Cf. Hist. coelest. Lib. [illegible] p. XLIII. sq. Beziehen sich nun, wie zu verstehen zu seyn scheint, jene vier Beobachtungen vom Decemb. 1464, Jun. 1465, und April 1468. noch, wie die unmittelbar vorhergehende, auf Rom; von wo aus Regiomontanus wirklich noch den 15 Febr. 1465. an Jacobum de Spira, astronomum dni Federici Comitis Urbinatum schrieb, dessen ebenfalls nach Rom überschriebene Antwort vom 6 April 1465. aber bald darauf apud balneas viterbienses beantwortete (Murr Memorabil. l. c. Epist. VI. p. 153. 165. Epist. VII. p. 165. 170. Epist. VIII. p. 171. 183.): so kann er wenigstens erst in der zweyten Hälfte des Jahr 1468. nach Wien zurückgekommen seyn; und frühestens in dem Jahr 1469. seine Tabulas directionum ausgearbeitet haben.

In den Auflösungen und Beyspielen der denselben vorausgeschikten Aufgaben gebraucht Regiomontanus zwar Sinus für den Halbmesser 60000; bemerkt aber in der 10ten Aufgabe, nachdem er einen gesuchten Bogen mittelst der Sinustafel für diesen Halbmesser berechnen gelehrt hat: Facilius tamen idem efficies, si tabula tua maximum sinum habeat 100000; und zeigt das Verfahren mittelst einer solchen Tafel. Und bey näherer Betrachtung seiner Tabula declinationum generalis überschriebenen Hülfstafel, und ihrer Anwendung zur Auflösung seiner 9ten Aufgabe ergiebt sich: daß die in derselben unter der Aufschrift Numerus multiplicandus angegebene Zahlen die Sinus sind für den Halbmesser 100000 von den Winkeln, welche auf der Ekliptik senkrechte Bogen

den Halbmesser 60000 berechnet (e). In dem folgenden

grösser Kreise mit dem Aequator machen. Ein Beyspiel früherer von Regiomontanus gemachten Anwendung der Decimalrechnung wird in der Note b zu §. 69. angeführt.

(e) Dieß erhellt aus folgenden Stellen der in der Note d angeführten, von Hr. v. Murr bekanntgemachten Briefe. In dem zweyten schreibt Blanchinus (p. 80.): Videbitis autem decisiones meas ad quesita uestra, et approbationes, quas subiunxi ex canonibus et tabulis meis de primo mobili extractas et operationes tabellarum magistralium per me compositarum: et si non uidistis, uidebitis, in quanta breuitate reducitur calculus; et non dubitetis, quod omnia demonstraui in Libro Florum almadesti (sic). Reduxi enim denominationes sinuum ad numeros discretos, propter abbreuiationem et facilitatem calculandi. Und in dem vierten Brief schließt er (p. 111.) eine Berechnung folgendermassen: Eruntque in summa gr. 75 min. 41 sec. 30, quorum sinus per tabulas inuenio in numeris 50138 quos multiplico per numerum supra saluatum (9675) et producuntur secundum doctrinam canonum 56149 fere ex quibus per tabulam sinus inuenio arcum gr. 69 min. 38.; übereinstimmend mit Regiomontans Sinustafel für den Halbmesser 60000, wenn statt 50138 gelesen wird 58138. Die Aufgabe, wozu diese Berechnung gehört, ist die zu Ende der Note d. angeführte zweyte: Aus der gegebenen Länge und Breite eines Sterns seine Abweichung finden. Und Blanchinis Auflösung derselben kommt mit Regiomontans seiner auch darin überein: daß sein Multiplicator 9675, den er, wie er sagt, in seiner tabula magistrali prima findet, und Regiomontans Numerus multiplicandus in seiner Tabula declinationum generalis, Sinus des nämlichen Winkels sind, jener für den Halbmesser 10000, dieser für den Halbmesser 100000.

Hr. v. Murr giebt von den Blanchinischen Tafeln und den Ausgaben derselben in einer Note p. 83. folgende Nachricht: Joh. Blanchini, Bononiensis, Novæ tabulæ cœlestium motuum, dicatæ Imperatori Friderico III. cum Lucæ Gaurici additionibus. Venetiis 1526. fol. Conficiebat illas A. 1458. Prima editio est Veneta 1495. 4. Postea prodiere cum Tabulis Prugneri & Purbachii, Basil. 1553. fol.; & inter Gaurici Opera, Tom. I. num. 6. ibid. 1575. fol. Die Ausgabe von 1495. beschreibt Hr. Hofr. Kästner in seiner Gesch. d. Math. II. B. S. 518. ff.

Abschriften der Blanchinischen Tafeln waren um 1463.

Jahrhundert gab, acht Jahre vorher, ehe Regiomontans Sinustafel für den Halbmesser 10000000 durch den Druk bekannt gemacht wurde (d), der Ingolstadtische Professor der Mathematik Petrus Apianus (Peter Bienewitz) (f) eine von ihm berechnete, auf einzelne Minuten ausgedehnte Sinustafel für den Halbmesser 100000 heraus (g). Und in

schon in mehrerer Händen. So schreibt Blanchinus in dem angeführten zweyten Brief (p. 78. sq.): Et quia a Magistro Christophoro Brisiensi nostro pluribus mensibus elapsis habui, quod nobis accommodavit tabulas meas; puto uos forte habere copiam illarum: quod mihi ualde gratum esset, quia summopere desidero illas ad manus peritorum, ut uos estis, peruenire. Und unmittelbar nach der obenangeführten Stelle fährt er fort (p. 80.): Si vero illud non habetis illis (illic), seu Tabulas meas de primo mobili; sunt aliqua que Venetiis herent. — Und Regiomontanus antwortet in dem dritten Brief (p. 83.): Quid profuit more meo uestre respondisse interrogationi? cum longe facilius eam decidere liceat per tabulas uestras quas de primo mobili contexuistis, quas equidem Rome magister Christoforus mihi commodauit. Vtinam ego copiam earum fecissem! Eas summopere et laudandas censeo, et omnibus studiosis publicandas, quod breuiter atque faciliter quicquid de primo mobili queritur expediant. Non licuit autem hactenus earum exemplum comparare. — Curabo tamen, si possibile fuerit, eas uestras tabulas uidere saltem nunc Venetiis —

(f) geboren 1495. zu Leißnig in Sachsen; gestorben zu Ingolstadt 1552. Weidler p. 349. sq. Kästners Gesch. d. Math. I. B. S. 561. 578. ff. II. B. S. 331. ff. 505. f. 548. ff.

(g) Auf pag. Bii. b. — Cii. b. des Werks: Introductio geographica Petri Apiani in doctissimas Verneri Annotationes, continens plenum intellectum & iudicium omnis operationis, que per sinus & chordas in Geographia conficí potest, adiuncto Radio astronomico cum quadrante nouo Meteoroscopii loco longe utilissimo. Huic accedit Translatio noua primi libri Geographiæ Cl. Ptolemæi. Translationi adjuncta sunt argumenta & paraphrases singulor. capitum: libellus quoque de quatuor terrarum orbis in plano figurationib. Authore Vernero. Locus etiam pulcherrimus desumptus ex fine septimi libri ejusdem Geographiæ Claudii Ptolemæi de plana terrarum orbis descriptione jam olim

der zweyten Hälfte eben dieses Jahrhunderts berechnete. Sy-

& a veterib. instituta Geographis, una cum opusculo Amirucii Constantinopolitani de iis, quæ Geographiæ debent adesse, Adjuncta est & epistola Joannis de Regio monte ad Reuerendissimum patrem & Dominum D. Bessarionem Cardinalem Nicenum atque patriarcham Constantinopolitanum, de compositione & usu cujusdam Meteoroscopii armillaris, cui recens iam opera Petri Apiani accessit Torquetum instrumentum pulcherrimum sane & vtilissimum. Ingolstadii. An. MDXXXIII. fol. Ein unvollständiges Exemplar dieses Werks beschreibt Hr. Hofr. Kästner in s. geometr. Abhdl. I. Samml. 531. ff. und in s. Gesch. d. Math. II. B. S. 498. ff. Apians Introductio, welche dabei fehlt, fängt pag Aiii. a. mit den Worten an: Quandoquidem nunc institutum meum est, quicquid ex hoc libro tum intelligentiæ sanæ tum vsus egregii percipi potest, id omne per tabulas sinuū rectorum docere, operæ præcium visum est principio, quid sinus sit ostendere, deinde quo fundamento tabulas istas supputarim commonstrare. Und p. Bii. a. schließt er diese Vorbereitung: Satis mihi jam videor ostendisse tibi intellectum sinuum & supputationem tabularum super iisdem, ac proinde consultum nunc porro visum est huic loco inserere Tabulas quas super 100000 puncta ad libros vmbrarum computaui — worauf diese auf 9 Seiten folgen mit der Aufschrift: Tabula sinuum rectorum siue semichordarum minutim extensa.

Eben diese Tafel hat Apianus in dem nächstfolgenden Jahr fol. b 2 — c 2. des Werks eingerückt: Instrumentum primi mobilis a Petro Apiano nunc primum et inuentum et in lucem editum. Ad cujus declarationem & intellectum Pronunciata centum hic proponuntur, e quibus Instrumenti nobilissimi vsus innotescit & compositio — Accedunt iis Gebri filii Affla Hispalensis — libri IX. de Astronomia, ante aliquot secula Arabice scripti, & per Giriardum Cremonensem latinitate donati, nunc uero omnium primum in lucem editi. Omnia hæc industria & beneuolentia Petri Apiani prelo commissa, & Reverendiss. in Christo patri & D. D. Christophoro a Stadio &c. ornatissimo Præsuli Augustensi — dedicata — Norimbergæ — Anno MDXXXIIII. fol. S. Kästners geom. Abh. I. Samml. S. 542. f. Gesch. d. Math. I. B. S. 578. ff. In der Zueignungsschrift sagt Apianus: Complures pene quotidie conquesti sunt de immodica tabularum

org Joachim, von seinem Vaterlande gewöhnlich Rhe-

primi mobilis obscuritate & difficultate. — Illorum ergo studium — adiuuare æquissimū esse credidimus, simulque — communi consulere utilitati, id eo maxime futurum esse perspeximus, si tabulæ istæ ex horrida illa & difficili formula in supputationē sinuū per nos redigerentur. — Sed quia hic nonnulli adhuc grauari sibi uidentur numeris arithmeticis, & amplioré profectū ex instrumentis astronomicis putant se consequuturos, hic quoque noluimus studiosis deesse, simul ergo & tabulas nouas sinuum & instrumentum ad hoc longe commodissimum ecce in lucem proferimus. Und neben der ersten Seite der Tabula sinuum rectorum siue semichordarū minutim extensa steht — Libuit in gratiam eorum quibus numeri magis arrident quam instrumenta, adponere hic tabulas sinuū, quas ipsi supputauimus ad 100000 puncta. —

Mit der nämlichen Randbemerkung steht diese Tafel noch fol. b3—c3 des Instrumentum sinuum, seu primi mobilis, nuper a Petro Apiano, inventum, nunc autem ab eodem diligenter recognitum & locupletatum. Cuius tractatione cum genuinus & latissime patens sinuum usus clarissime deprehenditur, tum uero quicquid earundem (sic) sinuum auxilio in rebus astronomicis ratiocinando indagari potest, facilime ac celerrime conficitur. Adiectus est & Quadrans universalis seu generalis, noua facie, in eundem usum fabrefactus. Cuius usu, quicquid ex tabulis sinuum cōputādo elici poterat, sine negotio, sineque numerorū molestiore tractatiōe facilime perspicitur. Norimbergæ — MDXLI. fol.

Uebrigens scheint sich auf jene ersten zwey Werke Apians zu beziehen, was Schoner in der Zueignungsschrift seiner zu Anfang der Note d. angeführten Ausgabe der Regiomontanischen Sinustafeln und Schriften äussert: Admiratione dignum est, fuisse quosdam qui huius doctissimi viri labores, tanquam ingenii sui fœturas, sui nominis inscriptione, suppresso interim nomine Regiomontani publicare non erubuerint, secus facientes, quam facere decet bonos uiros. — Ipse hoc potissimū ago in hac editione, ut Regiomontano, — tanquam ueteri colono, sui restituantur agri. Quam uoluntatem, nemo est, opinor, inter doctos, qui improbare uelit.

Zur Herausgabe des ersten hier angeführten Werks hatte Joannes Guilielmus a Loubenberg, Equ. aur. arcis Wagegg, welchem auch Apianus dasselbe zugeeignet hat, in

einem auf der ersten Seite des Blatts Aii darin abgedruk-ten Brief vom 6 Decemb. 1532. den Verfasser mit folgenden Gründen aufgefordert: Non clam te esse existimo — plures studiorum mathematicorum tyrones summopere conqueri solere, quod annotationes & paraphrasêis doctissimi viri Verneri, quas ille in libros Geographiæ Ptolemæi confecit, (Werner hatte sie 1514 zu Nürnberg herausgegeben; und gebrauchte darin Sinus für den Halbmesser 100000 extabulis sinuum Joannis de Regiomonte) percipere minus queant, tum etiã ob chordarum sinus quos nunc nonisi ad 60000 puncta & eos absque omni lectorum usu & vtilitate cõputatos, typis excusos cõperiant, obscuriores illis videri, nõ aũt aliquos huius artis cupidos latet a te in libris qui sunt De vmbris inscripti, sinus ad 100000 puncta vsque cõputatos ac cõstitutos esse. Nõ potui igitur nõ rogare — vt sinus istos cũ breui quadã Isagoge in explanationẽ clariorem annotationũ & paraphrasiũ Verneri ædere nõ intermittas —

Wirklich scheint um diese Zeit nur die in der Note d. erwähnte, den Regiomontanischen Tabulis directionum angehängte Sinustafel für den Halbmesser 60000, und selbst nur wenige Ausgaben derselben, im Druk vorhanden gewesen zu seyn. Hr. Scheibel führt wenigstens a. a. O. ausser der Augspurger Ausgabe von 1490. nur noch eine Venetianische von 1504. an, vor der Tübingischen ersten vom J. 1550.

Eine auf einzelne Minuten ausgedehnte Tafel der Sinus, nach Ptolemäischer Art in partibus, minutis & secundis ausgedrükt, steht fol. 59—63. am Ende von Geometriæ Lib. I. in dem 1532. zu Paris herausgekommenen Werk: Orontii Finei Delphinatis, liberalium disciplinarum Professoris regii, Protomathesis: Opus unicum, ac scitu non minus vtile quam iucundum, nunc primum in lucem feliciter emissum. fol. (Kästners Gesch. d. Math. I. B. S. 449. ff.) Von der Verfertigung dieser Tafel giebt der Verfasser fol. 57. folgende Rechenschaft: Ptholemæus (sic) Libro primo suæ magnæ compositionis (quam uulgus nominat almagestum) subtiles admodum chordarum, hoc est rectarum linearum in circulo subtensarum inuentiones, geometricis deductionibus ostendit: ex quibus tabulã de chordis, siue rectis in circulo subtensis tandem supputauit — Diuisit itaque diametrum ipsius circuli, omnium quippe rectarum in circulo subtensarum maximam, in 120 partes inuicem æquales: qualium partium, proportionatã reddidit omnium aliarũ chordarũ quantitatẽ. Nos igitur singulas chordas primum examinauimus, cuilibet minuto singulorum gra-

dium semicirculi respondentes: per continuam sexagesimarum partium additionem, easdem chordas extendendo. Dein medios arcus separauimus, dimidiasque subtensas accepimus chordas: quo sinus recti singulis minutis cuiuslibet gradus quadrantis ipsius circuli nobis restituerentur. Peurbachs und Regiomontans Eintheilungen des Halbmessers erwähnt Orontius nicht; ungeachtet er des leztern Tabulas directionum fol. 117. b. anführt.

Der berühmte Nicolaus Copernicus rechnet in seinem Werk De revolutionibus orbium cœlestium, das zwar erst 1543. zu Nürnberg erstmals im Druk erschienen ist, aber schon um 1530. dem wesentlichsten nach vollendet war (Gassendi Opp. T. V. Nicol. Copernici vita. p. 447. 451. Kästners Gesch. d. Math. II. B. S. 364. 595.), gewöhnlich mit Sinus für den Halbmesser 10000; und dem De magnitudine rectarum in circulo linearum überschriebenen 12 Cap. des I. Buchs ist fol. 35. b. — 39. obiger Nürnberg. Ausgabe eine Sinustafel von zehn zu zehn Minuten für den Halbmesser 100000 angehängt, mit ausführlicher in dem Capitel vorausgeschikter Beschreibung der Art, wie er sie berechnet habe.

Ein Jahr früher ist durch Joachimi Rhætici (S. Note h.) Veranstaltung herausgekomen De lateribus et angulis triangulorum tum planorum rectilineorum, tum sphæricorum, libellus eruditiss. et utiliss. — scriptus a clariss. et doctiss. viro D. Nicolao Copernico Toruniensi. Additus est canon semissium subtensarum rectarum linearum in circulo. Viteb. 1542. 4°. Den Nachrichten zufolge, welche Gassendus (l. c. p. 449.) und Kästner (Gesch. d. Math. I. B. S. 576. ff.) von dieser Schrift geben, ist der erste Theil derselben ein Abdruk des 13 und 14 Cap. des I. B. De revolut. orb. cœlest. Rhäticus war von 1539. bis 1541. bey Copernicus gewesen (S. Note h); und gab in der Zueignungsschrift an Georg Hartmann zu Nürnberg folgende Veranlassung zu der Herausgabe dieses Stüks des Werks von Copernicus an: Hi, qui Ptolemæum explicare conati sunt, multa de triangulis commentati sunt — Nunc recens (1533.) prodiit lucubratio Regiomontani: sed multo ante, quam hanc videre potuit vir clariss. & doctiss. D. Nicolaus Copernicus, dum & in Ptolemæo illustrando & in doctrina motuum tradenda elaborat, de triangulis eruditissime scripsit. Scio tibi admirationi fore hoc scriptum, cum videbis, quantas res quam artificiose complexus sit. Ut autem hoc tempore ederem, eo accidit, quod in enarratione Ptolemæi nobis opus fuit triangulorum doctrina (Gassend. l. c.). Der beygeführte Canon

ticus genannt (h), die Sinus von zehn zu zehn Secunden giebt die Sinus für einzelne Minuten und für den Halbmesser 10 000 000. an. Hr. Kästner vermuthet (a. a. O. S. 578.): „er sey nicht von Copernicus selbst, sondern von jemand anders berechnet, oder nach einer Tafel, die schon vorhanden „war," (die Regiomontanische war 1541. von Schoner herausgegeben worden) „abgedrukt; welches auch die Worte „Additus est andeuten könnten."

(h) geboren 1514. zu Feldkirch in Vorarlberg, einem Theil des alten Rhätien; gestorben zu Kaschau in Ungarn 1574. Weidler (Hist. astron. 355. sq.) erzählt von ihm: Georgius Joachimus Rheticus patriam habuit oppidum Rhetiæ Feldkirchen ad Illam, ubi in lucem hanc editus est a. 1514. Febr. 15. Postquam elementa matheseos Tiguri apud Oswaldum Myconium imbiberat (Gesneri Bibl. univers. p. 269.); contulit sese Vitebergam, eandemque ibi diligentius excoluit. Probat ordinis nostri matricula prima, Rheticum a. 1535. d. 18. Julii Magistri philosophiæ dignitate auctum; & a. 1537. Non. Januar. Decano Melanchthone, Professorum numero adscriptum fuisse. Reinholdus nimirum superiora, Rheticus inferiora Mathemata profitebatur — Anno 1539 — Rheticus, fama Copernici adductus, missa tantisper sparta sua, Fruenburgum abiit, & aliquamdiu laboribus Copernici Uranicis interfuit — Rediisse eum Vitebergam a. 1541. vel 1542, & officium suum denuo obiisse, ex matricula nostra didici: siquidem a. 1542. M. Febr. & sq. Decanatum gessit, & candidatis nonnullis Magistri lauream impertiit. Eodem anno commendatitiis Melanchthonis ad Vitum Dietericum literis instructus Norimbergam venit; ubi cum mathematicis familiariter conversatus manuscripta quædam Werneri & Regiomontani nactus est. Postea Lipsiæ mathesin docuisse fertur (Doppelmayr de mathematicis Noricis. p. 60.). [Dieser sagt: Rheticus gieng zu Ende des 1541. Jahrs wieder nach Wittenberg; da er dann zu Anfang des May im folgenden Jahr eine Reise nach Nürnberg, um sich mit den dasigen Mathematicis recht bekannt zu machen, mit einem Recommendationschreiben von Phil. Melanchthone an Veit Dietrichen, damaligen Prediger bey St. Sebald, begleitet (Epp. Phil. Melancht. Lib. IV. Norimb. 1640. p. 154.), vornahme — Nach einiger Zeit verfügte sich Rheticus nach Leipzig; versahe daselbsten die Stelle eines Professoris mathematum (Joach. Camerarii Epist. fam. 48. & 480. Rami Schol. Math. p. 66.) mit grossem Ruhm.] Ex Saxonia iterum, nescio quam ob caussam,

erſtlich für den Halbmeſſer 10 000 000 000 (i); hernach ebendieſelbe, und zugleich des erſten und lezten Grades Sinus durch alle Secunden, für den Halbmeſſer 1000 000 000 000 000 (k).

discessit in Poloniam [Ramus Schol. math. Francof. 1599. p. 63. giebt an: Rheticus & Homilius Lipsiam; Rheticus etiam Cracoviam mathematis illustravit; & literis nostris ad studium liberandæ hypothesibus astrologiæ incitatus spem quoque illustrandæ Parisiensis academiæ dederat: ac nisi medicinam mæcenatis cujusdam loco perdiscere & exercere coactus esset, jam pridem alterum Copernicum mathemata celebrarent.]; & hinc ad Jo. Reuberum, Cassoviam in Hungariam, ubi vitam finiit a. 1576. Dec. 4. teste Valent. Othone, discipulo ejus, in Præf. Operis Palatini de triangulis. Das erwähnte Todesjahr und Tag giebt Doppelmayr an; nicht Otho. Dieſer meldet im Gegentheil (Præf. fol. b. 2.): Carissimus præceptor Georgius Joachimus Rheticus — in complexu meo exspiravit, cum ab ætatis suæ anno primo & sexagesimo non longe abesset (Nach jener Zeitangabe hätte er bald ſein 63tes Jahr angetreten). De quo cum Dnus Ruberus nunciasset in aulam Imperatoris Maximiliani II: Imperator non tantum Rhetici petitionem fut, simul ac decessisset, mihi opus ipsius, quod imperfectum relinqueret, traderetur] ratam habuit; sed &, præter spem & expectationem meam, sumtus mihi ad operis confectionem necessarios suppeditare jussit. — Nondum vero biennium exegeram, cum de Imperatoris obitu nuntium afferretur. Kaiſer Maximilian II. iſt aber den 12. Octob. 1576. geſtorben. Mehreres von Rhäticus und Otho ſteht in Käſtners Geom. Abh. I. Samml. S. 553. ff. Geſch. d. Math. I. B. S. 561. ff. 590. ff. Vgl. §. 67. Note c und e.

(i) Dieſe Sinustafel iſt ein Theil des von Lucius Valentin Otho herausgegebenen Georgii Joachimi Rhætici Magnus Canon doctrinæ triangulorum ad decades secundorum scrupulorum & ad partes 10 000 000 000; welcher folgendem Werk beygefügt iſt: Opus Palatinum de Triangulis a Georgio Joachimo Rhetico cœptum: L. Valentinus Otho Principis Palatini Friderici IV. Electoris Matheticus consummavit. An. Sal. hum. cIↃ IↃ xcvi. Neostadii in Palatinatu, excudebat Matthæus Harnisius. fol. S. Käſtner a. d. a. Stellen; wo noch zwey Ausgaben dieſes Werks von 1607. und 1616. angeführt werden. Vgl. §. 67. Note d.

(k) Dieſe nach manchen vergeblichen Erkundigungen unter des

§. 17.

Die oben angezeigte Veranlassung zur Aufstellung des Sazes §. 10. 13. und zur Berechnung der Sinustafeln enthält schon die Anwendung derselben auf die Berechnung der andern zwey Seiten eines Dreyeks, in welchem eine Seite und zwey Winkel gegeben sind.

Da für den Halbmesser 10 000 000
der Sinus von 75° = 9659258,
Sin. » 45° = 7071068,
Sin. » 60° = 8660254 sind;

so würde man das Beyspiel §. 4. durch folgende zwey Proportionen berechnen:

8660254 : 7071068 = 150 Fuß : AC;
8660254 : 9659258 = 150 Fuß : BC.

Hieraus sieht man, daß die Genauigkeit der genäherten Ausdrüke der Sinus die Unbequemlichkeit hat, daß sie große Multiplicationen und Divisionen erfordert. Denn man

Rhäticus Papieren, welche Otho besessen hatte, nach dessen Tod entdekte Tafel enthält der Thesaurus mathematicus sive Canon sinuum ad radium 1 000 000 000 000 000 et ad dena quæque scrupula quadrantis, vna cum sinibus primi et postremi gradus ad eundem radium et ad singula scrupula secunda quadrantis. Adiunctis ubique differentiis primis et secundis, atque vbi res tulit etiam tertiis. Jam olim quidem incredibili labore et sumtu a Georgio Joachimo Rhetico supputatus: at nunc primum in lucem editus et cum viris doctis communicatus a Bartholomæo Pitisco Grunbergensi Silesio. Cuius etiam accesserunt I. Principia sinuum ad radium 10 000 000 000 000 000 000 000 000 quam accuratissime supputata. II. Sinus decimorum, tricesimorum et quinquagesimorum quorumque scrupulorum secundorum per prima et postrema 35 scrupula prima ad radium 10 000 000 000 000 000 000 000 000. Francofurti excudebat Nicolaus Hofmannus sumtibus Jonæ Rosæ. Anno cIↃ IↃXIII. So steht die Jahrzahl auf dem Titel; am Ende der Vorrede 1613. S. Kästners Geom. Abh. I. Samml. S. 573. ff. Gesch. d. Math. I. B. S. 612. ff.

findet die vierte geometrische Proportionalzahl zu drey gegebenen Zahlen, wenn man die beyden mittleren miteinander multiplicirt, und ihr Produkt mit der ersten dividirt.

Die Bemerkung: daß man die vierte arithmetische Proportionalzahl zu drey gegebenen Zahlen findet, wenn man die zwey mittleren zu einander addirt, und von ihrer Summe die erste abzieht; hat auch diese Unbequemlichkeit zu heben Veranlassung gegeben. Man hat es nämlich so einzurichten gesucht: daß man, statt vierter geometrischer Proportionalzahlen, vierte arithmetische Proportionalzahlen zu suchen hätte; übrigens aus diesen hernach leicht entweder jene, oder das, was man durch sie in den Dreyeken finden wollte, schließen könnte: so wie es schon dadurch, daß man die Sinus statt der Winkel oder der Anzahl ihrer Grade sezte, gelungen war, die Berechnung der Dreyeke auf geometrische Proportionen zurükzuführen, welche zwischen den Seiten und Winkeln der Dreyeke selbst nicht statt finden.

Zu diesem Ende nahm man eine Reihe stetig geometrisch proportionirter Zahlen (eine geometrische Progression) an

0 1 2 3 4 5 6
a, b, c, d, e, f, g, u. s. w.

und bezeichnete das erste Glied mit 0, die folgenden der Ordnung nach mit 1, 2, 3, u. s. w. welche also eine arithmetische Progression ausmachten, d. h. eine Reihe von Zahlen in steter arithmetischer Proportion. In der geometrischen Progression sind mithin die Verhältniße

b : a
c : b
d : c
e : d
u. s. w.

} einander gleich,

folglich ist das Verhältniß von c : a zusammengesezt aus den zwey gleichen Verhältnissen c : b und b : a; oder es ist das zweyfach höhere (duplicirte) Verhältniß von b : a. Ebenso

ist das Verhältniß d:a aus den drey gleichen Verhältnißen d:c, c:b, b:a zusammengesezt; oder es ist das dreyfach höhere (triplicirte) Verhältniß von b:a u. s. w. Die Glieder 2, 3, u. s. w. der arithmetischen Progression zeigen nun, aus wie viel einfachen, dem ersten b:a gleichen Verhältnissen das Verhältniß der ihnen entsprechenden Glieder der geometrischen Progression zu dem ersten Glied zusammengesezt sey. So ist das Verhältniß von g:a das sechsfach höhere (sextuplicirte) Verhältniß von b:a. Man nannte daher diese Glieder der arithmetischen Progression die Logarithmen (αριθμος λογυ, numeros indices rationis) der als aus dem einfachen Verhältniß b:a zusammengesezt betrachteten Verhältnisse, welche die ihnen entsprechenden Glieder der geometrischen Progression zu dem ersten Glied derselben haben: weil sie anzeigen, durch welche Vervielfachung jenes Verhältnisses b:a lezteres entstehen, oder aus wieviel jenem gleichen Verhältnissen dieselbe zusammengesezt sind. So heißt nämlich 6 der Logarithmen des Verhältnisses von g:a; weil g:a das (sextuplicirte) sechsfach höhere Verhältniß ist von b:a.

Weil jede Zahl selbst ihr Verhältniß zur Einheit angiebt; so nannte man den Logarithmen des Verhältnisses einer Zahl zur Einheit schlechtweg den Logarithmen dieser Zahl. Sezt man also in obiger Progression 1 an die Stelle von a, so daß man hat

0 1 2 3 4 5 6
1, b, c, d, e, f, g u. s. w.;

und nimmt folglich b:1 als das einfache Verhältniß an, aus welchem man die andern c:1, d:1, u. s. w. zusammensezt: so heißt z. B. die Zahl 6, welche anzeigt, daß das Verhältniß von g:1 das sechsfachhöhere Verhältniß von b:1 ist, der Logarithme von g. Der Analogie nach heißt 1 der Logarithme des einfachen Verhältnisses b:1 oder der Zahl b; und 0 heißt der Logarithme der Einheit.

Es sey, wie vorhin das Verhältniß von g:1 das sechsfach höhere Verhältniß von b:1; das heißt, es seyen

$$g:f = b:1$$
$$f:e = b:1$$
$$e:d = b:1$$
$$d:c = b:1$$
$$c:b = b:1$$
$$b:1 = b:1$$

so ist nach der Theorie der Zusammensezung der Zahlenverhältnisse

$$g:1 = b^6:1$$

folglich $g = b^6$.

Und ebenso im allgemeinen, wenn n der Logarithme der Zahl q ist, d. h. wenn n die Zahl ist, welche anzeigt, wie oft das einfache Verhältniß b:1 vervielfacht werden muß, um das zusammengesezte Verhältniß q:1 hervorzubringen; so ist $q = b^n$.

Das zweyte Glied b der hiebey angenommenen geometrischen Progression, welches zu gleicher Zeit der Exponent derselben ist, nennt man die Basis (Grundzahl) des daraus entstehenden logarithmischen Systems. Der Logarithme n einer Zahl q ist daher der Exponent der Potenz, auf welche man die Basis des logarithmischen Systems erheben muß, um die vorgegebene Zahl q zu erhalten. Und die Basis eines logarithmischen Systems ist die Zahl, deren Logarithme die Einheit ist.

Aus dem bisherigen folgt, daß in einem logarithmischen System nichts als die Basis willkührlich ist; und daß, wenn diese einmal angegeben ist, der Logarithme einer jeden Zahl q eine bestimmte Zahl n ist; so daß man aus der Gleichheit der Zahlen auf die Gleichheit ihrer Logarithmen in demselben System, und umgekehrt aus lezterer auf die erstere schließen kann. Aus verschiedenen als Basis angenommenen Zahlen entstehen aber verschiedene Logarithmen-Systeme, in welchen dieselbe Zahl verschiedene Logarithmen hat. So würde seyn

für $b = 2$, der Log. der Zahl $64 = 6$, weil $2^6 = 64$;
für $b = 4$ " Log. " " $64 = 3$, weil $4^3 = 64$;
und für $b = 8$ " Log. " " $64 = 2$, weil $8^2 = 64$.

Unſere gemeinen Logarithmen ſind für die Baſis $b = 10$ berechnet, oder für die geometriſche Progreſſion

1, 10, 100, 1000, 10000, u. ſ. w.

auf welche ſich ſchon unſere gewöhnliche Art zu zählen gründet. In dieſem Syſtem, ſo wie in jedem, deſſen Baſis > 1 iſt, oder bey welchem eine wachſende geometriſche Progreſſion zum Grund liegt, gehört zu einer größeren Zahl ein größerer Logarithme, zu einer kleinern ein kleinerer. Das Gegentheil hat ſtatt, wenn die Baſis < 1, oder die zum Grund liegende geometriſche Progreſſion abnehmend iſt. Leztere Geſtalt haben die nach ihrem Erfinder, dem Schottländiſchen Baron Johann Neper (a) benennten Neperiſchen Logarithmen (b): erſtere, die von Juſtus

(a) In An Account of the life, writings, and inventions of John Napier, of Merchiston; by David Stewart, Earl of Buchan, and Walter Minto, L. L. D. (Perth 1787.) wird p. 10. 18. angegeben: Neper ſey 1550. zu Merchiston in der Nachbarſchaft von Edinburg geboren; und ebendaſelbſt den 3 April 1617. kurz nach der Herausgabe ſeiner Rhabdologiæ seu numerationis per virgulas Libri duo; cum appendice de expeditissimo multiplicationis promptuario: quibus accessit Arithmeticæ localis Liber unus (Edinb. 1617.) geſtorben. (Käſtners Geom. Abh. I. Samml. S. 493. Geſch. d. Math. III. B. S. 14. 95. f.) Nach Montucla (T. II. p. 15.) und Hutton (Mathematical Tables. Lond. 1785. Introduction. p. 24. 34.) iſt Neper erſt 1618. geſtorben. Sein Geburtsjahr geben ſie nicht an. In dem Account wird ſich darüber p. 10. auf an inscription on his portrait, engraved by old Cooper from an original painting, beruffen. Aber p. 18. wird bloß erzählt: The last literary exertion of this eminent person was the publication of his Rhabdology and Promptuary in the year 1617, which he dedicated to the Chancellor Seton, and soon after died at Merchiston, on the 3d of April, O. S. of the same year, in the 68th year of his age. Hutton hingegen ſagt p. 24: John Napier — died the 3d of April 1618. at the age of 67 years. Uebrigens führt er p. 33. 34. 35. mehrere Umſtände an, welche ſeine Angabe des Todesjahrs Nepers zu beſtätigen ſcheinen.

(b) Neper machte ſie bekannt in Mirifici Logarithmorum Canonis descriptio; ejusque usus in utraque Trigonometria, ut etiam in omni Logistica mathematica, am-

plissimi, facillimi & expeditissimi explicatio. Authore ac inventore Joanne Nepero, Barone Merchistonii &c. Scoto. Edinburgi cIↃDCXIV. 4°. Nach seinem Tode gab sein dritter Sohn Robert heraus: Mirifici Logarithmorum Canonis descriptio; ejusque usus — explicatio. Accesserunt Opera posthuma; Primo, Mirifici ipsius Canonis constructio, et Logarithmorum ad naturales ipsorum numeros habitudines. Secundo, Appendix de alia eaque præstantiore Logarithmorum specie construenda. Tertio, Propositiones quædam eminentissimæ ad Triangula sphærica mira facilitate resolvenda. Autore ac inventore Joanne Nepero — Edinburgi cIↃDCXIX. 4°. Beyde Werke sind zu Lyon, das erste 1617, das zweyte 1620. nachgedrukt worden. (Scheibel II. B. 7. St. S. 3. ff. 20. ff. Kästners Astron. Abh. II. Samml. S. 63. ff. Gesch. d. Math. III. B. S. 13. f. 70. ff. Karstens Lehrbegriff der gesammten Mathematik. Des zweyten Theils erste Abtheilung. Zweyte Auflage. Griefswald 1786. S. 220. ff. 237. ff.)

Von der Veranlassung zu seiner Erfindung sagt Neper in der Vorrede des ersten: Quum nihil sit — mathematicæ praxi tam molestum — quam magnorum numerorum multiplicationes, partitiones, quadratæque ac cubicæ extractiones, quæ præter prolixitatis tædium lubricis etiam erroribus plurimum sunt obnoxiæ; cœpi igitur animo revolvere, qua arte certa & expedita possem dicta impedimenta amoliri. Multis subinde in hunc finem perpensis, nonnulla tandem inveni præclara compendia, alibi fortasse tractanda: verum inter omnia nullum hoc utilius, quod una cum multiplicationibus, partitionibus, & radicum extractionibus arduis & prolixis, ipsos etiam numeros multiplicandos, dividendos, & in radices resolvendos ab opere rejicit, & eorum loco alios substituit numeros, qui illorum munere funguntur per solas additiones, subtractiones, bipartitiones, & tripartitiones. Quod quidem arcanum, cum (ut cætera bona) sit, quo communius, eo melius: in publicum mathematicorum usum propalare libuit. —

Die Grundzüge der Lehren, worauf jene Zahlen-substitution beruhet, finden sich schon in des Archimedes Schrift, Ψαμμιτης betitelt (Αρχιμηδους τα Σωζομενα — Oxon. 1792. p. 326. Εικα, αριθμων απο τας μοναδος αναλογον εωντων, πολλαπλασιαζοντες τινες αλλαλους των εκ τας αυτας αναλογιας· ὁ γενομενος εσσειται εκ τας αυτας αναλογιας, απεχων απο μειζονος των πολλαπλασιαξαντων αλλαλους, οσους ο ελαττων των πολλαπλασιαξαντων απο μοναδος αναλογον απεχη· απο δε τας μοναδος αφεξει ενι ελαττονας, η οσος εστιν αριθμος συναμφοτερων, ους απεχωντι απο μο-

Byrgius (Jobst Burgi) (c) ungefähr zu einerley Zeit mit Neper angegebenen (d); so wie die gemeinen oder Brig-

ναδος οι πολλαπλασιαζαντες αλλαλους —), und noch umständlicher in Mich. Stifelii Arithmetica integra (Norimb. 1544. 4°, Lib. I. Cap. IV. p. 31. 35. sqq. Lib. III. Cap. V. p. 249. b. sq. S. Kästners Astron. Abh. II. Samml. S. 75. Gesch. d. Math. I. B. S. 115. 120. 128. Karsten a. a. O. S. 221.

Kepler schreibt 1624. an Crüger in Danzig: Doctrinæ triangulorum compendia vidi affectata a Romano, Nepero, Ursino, Pitisco — Sunt in compendiis sua dispendia — Nihil autem supra Neperianam rationem esse puto: etsi quidem Scotus quidam literis ad Tychonem a. cIↃIↃxcrv. scriptis jam spem fecit Canonis illius mirifici. (Epistolæ ad Joannem Kepplerum — scriptæ; insertis ad easdem responsionibus Kepplerianis — Epist. CXCIII. p. 459. sq.) Die Verfasser des oben angeführten Account folgern hieraus p. 14. 50. sqq.: Neper habe um das Jahr 1593. angefangen sich mit den Speculationen zu beschäftigen, welche ihn zu seiner grossen Vervollkommenung der Arithmetik geleitet haben.

Der Neperische Canon enthält nur Sinus der Bogen des Quadranten von Minute zu Minute für den Sinus totus 10000000; Logarithmen dieser Sinus (und zwar so, daß der Logarithme des Sinus totus = 0, und der Logarithme des Sinus von 89° 59′ = 1 angenommen ist; daher Lg. sin. 1′ = 81425681, Lg. sin. 0° = infinitum); und Differenzen jener Logarithmen. Seine 6te Definition (Mirif. Log. Canonis descriptio. p. 3.) lautet: Logarithmus cujusque sinus est numerus quam proxime definiens lineam, quæ æqualiter crevit interea dum sinus totius linea proportionaliter in sinum illum decrevit, existente utroque motu synchrono, atque initio æquiveloce.

Von Ursins, Keplers, Crügers Bearbeitungen und Tafeln Neperischer Logarithmen siehe Scheibel a. a. O. S. 47—67. Kästners Astron. Abh. II. Samml. S. 76. ff. Geom. Abh. I. Samml. S. 495—511. Gesch. d. Math. III. B. S. 87—95.

(c) geboren in der Schweiz 1552; gestorben zu Cassel 1633. (Doppelmayr S. 163. f. Weidler p. 375. sq. Kästners Astron. Abh. II. Samml. S. 75. Gesch. d. Math. II. B. S. 375. f.) Er soll auch Sinustafeln von zwey zu zwey Secunden berechnet haben.

(d) In $7\frac{1}{2}$ Bogen in Quart mit folgendem Titel: Arithmetische vnd Geometrische Progreß-Tabulem, sambt gründli-

gischen (e); und die natürlichen oder hyperbolischen (f), de-

chem Unterricht, wie solche nützlich in allerley Rechnungen zu gebrauchen und verstanden werden soll. Prag 1620. (Kästners Fortsetzung der Rechenkunst — Der mathemat. Anfangsgr. I. Th. 2te Abth. Göttingen 1786. S. 93—107. Gesch. d. Math. III. B. S. 14. f. Montucla T. II. p. 9. sqq.) In der Byrgischen Tafel sind nicht, wie in den gewöhnlichen, die Logarithmen nach den Zahlen geordnet; sondern die Zahlen nach den Logarithmen, welche von 0 an immer durch 10 bis 230 270 wachsen, und darüber noch um 0,020; 0,021; 0,022. Den Logarithmen 0; 10; 230,270,022 sind die Zahlen 100 000 000; 100 010 000; 999 999 999 zugeordnet.

(e) Heinrich Briggs, geb. 1560 zu Warleywood in der Grafschaft York, gest. zu Oxford 1630., seit 1596 Professor der Geometrie in dem Greshamischen Collegio zu London, und seit 1619. Savilischer Professor der Geometrie zu Oxford (Kästners Gesch. d. Math. III. Bd. S. 15. ff.), geriethe theils selbst, theils durch Unterredung darüber mit Neper in dem Jahr 1616, auf den Gedanken, das Verhältniß 10:1 zum Grunde zu legen; und gab schon 1618. die nach dieser Grundlage in acht Decimalzifern (ohne die Characteristik) berechnete Logarithmen der natürlichen Zahlen von 1 bis 1000 unter dem Titel Logarithmorum chilias prima heraus (Hutton p. 33. sqq. Montucla T. II. p. 22.). Sechs Jahre hernach erschien Arithmetica logarithmica; sive Logarithmorum (die Mantissen bis auf 14 Decimalstellen) Chiliades triginta, pro numeris naturali serie crescentibus ab unitate ad 20 000, & a 90 000 ad 100 000, quorum ope multa perficiuntur arithmetica problemata & geometrica. Hos numeros primus invenit clarissimus vir Johannes Neperus, Baro Merchistonii: eos autem ex ejusdem sententia mutavit, eorumque ortum & usum illustravit Henricus Briggs, in celebefrima academia Oxoniensi Geometriæ Professor Savilianus. Londini 1624. fol. (Montucla l. c. Hutton p. 36. sq. 60. sqq. Kästner a. a. O.)

Briggs wollte, wenn er die Kräfte, die er auf das gelieferte gewandt hatte, wiederum gesammelt hätte, die Lüke seiner Logarithmentafel ausfüllen. Ehe er aber dieses Vorhaben ausführte, berechnete der Buchhändler Adrian Vlacq zu Gouda in Holland die Logarithmen der fehlenden siebenzigtausend Zahlen, doch nur bis zehn Decimalstellen; und gab sie mit den von Briggs berechneten, durch Verminderung um vier Zifern auch auf zehn Decimalstellen beschränkten, heraus unter dem Titel: Arithmetica logarith-

mica, sive logarithmorum chiliades centum — una cum canone triangulorum — Editio secunda aucta per Adrianum Vlacq Goudanum — Goudæ excudebat Petrus Rammasenius. MDCXXVIII. fol. (Kästners Gesch. d. Math. III. B. S. 15. ff. 97. f. Montucla T. II. p. 27. Hutton p. 37.) Vlacq besorgte zugleich auch eine Ausgabe mit französischem Titel, Vorrede und Beschreibung der Berechnung und des Gebrauchs der Logarithmen. Der vollständige Titel dieser Ausgabe lautet: Arithmetique logarithmique ou la Construction et Vsage d'une Table contenant les Logarithmes de tous les Nombres depuis l'Vnité jusques à 100 000. Et d'vne autre Table en laquelle sont comprins les Logarithmes des Sinus, Tangentes & Secantes, de tous les Degrez & Minutes du quart du Cercle, selon le Raid de 100 000 000 000 parties. Par le moyen desquelles on resoult tres-facilement les Problemes Arithmetiques & Geometriques. Les Nombres premierement sont inventez par Jean Neper Baron de Marchiston: mais Henry Brigs, Professeur de la Geometrie en l'Vniversité d'Oxford, les a changé, & leur Nature, Origine, & Vsage illustré selon l'intention dudit Neper. La Description est traduite du Latin en François, la premiere Table augmentée, & la seconde composée par Adrien Vlacq. Dieu nous a donné l'Vsage de la Vie & d'Entendement, plus qu'il n'a fait par le Temps passé. A Goude, chez Pierre Rammasein. MDCXXVIII. fol. In der Vorrede meldet Vlacq: Il y a environ deux ans, qu'il me vint d'adventure entre les mains l'Arithmetique Logarithmique de Monsieur Henry Brigs Professeur en Geometrie à Oxford. Dont ayant veu le Contenu, comme je me trouvay grandement satisfaict de l'Excellence & rarité d'une si belle Invention, la voyant extremement utile á l'Arithmetique & Geometrie; ainsi d'autre part en la communiquant avec quelquesuns, je recognus bientost que c'estoit un ouvrage tout incognu en ce Pays Bas, tant envers les plus Doctes Mathematiciens, qu'entre les vulgaires Practiciens. Et en voyant le defaut des Exemplaires, afin que l'art ne demeurast plus caché en ce pays, pensay faire chose aggreable á plusieurs de faire remettre le dit Livre sur la Presse: sans toutesfois estre resolu du commencement en quelle maniere je le devrois publier. A la fin trouvay bon de l'agencer ainsi qu'il vous est ici presenté: à quoy faire j'ay esté induit par diverses raisons, que je commenceray icy à deduire. Et premierement je diray pourqoy j'ay tasché à suppléer le reste qui defailloit en la Table publiée l'An 1624. par l'Autheur, à

savoir, les Logarithmes de tous les nombres depuis 20000 jusques à 90000; comme aussi pourquoy je les ay abregé de quatre Characteres. Il est vray que le susdit Autheur avoit declaré en sa Preface, qu'il estoit d'advis d'accomplir iceux Logarithmes à l'aide de quelques personages, & (hormis aucune incommodité) de faire alors imprimer de nouveau l'ouvrage tout entier & accompli; de façon que je me fusse bien passé de ce labeur, n'eust esté que je me faisois accroire que l'accomplissement de la calculation d'un si grand nombre de Logarithmes, puis aussi l'impression d'un si grand Volume, retardée par les occupations ordinaires de sa Vocation, ou autres quelconques empeschements, qui n'adviennent que trop ordinairement à chasqu'un homme, requerroyent un trop long temps pour satisfaire à mon desir d'avoir lesdites Tables accomplies & d'en user pour ma speculation & contentement particulier. Joint encore, que l'ouvrage estant tout achevé, je n'estois nullement asseuré, qu'on auroit moyen d'en avoir assez d'Exemplaires en ce pays, moins encore s'ils seroyent publiez en autre langue que Latine: dont le profit (ce me semble) ne reviendroit qu'à bien peu de personnes. Me voyant doncques assez de loisir, & que les Logarithmes abregez de quatre Characteres sont beaucoup plus faciles à construire que Henry Brigs ne demonstre en son Chap. 13e: j'ay prins le courage d'entreprendre & achever en assez peu de temps toute l'oeuvre, comme j'ay aussi menée à fin, Dieu aidant, selon le terme que je m'avois proposé. Et ce qui m'a meu de les abreger ainsi de quatre lettres, c'est pour ce qu'ils sont encores grands assez pour l'usage commun. Et estants plus grands, qu'on ne s'en peut servir sans beaucoup de travail pour des grands nombres, qui sont de plus de dix Characteres; comme il le declare luy mesme en la premiere Edition Chap. 14e & en la presente (in welcher Briggs 12ß und 13ß Capitel weggelaſſen worden ſind) Chap. 12e apres lequel j'ay adjousté la maniere de trouver facilement Logarithme convenable à chasqu'un nombre, qui ne contienne pas outre dix Characteres, & au rebours. Je confesse que les Logarithmes estants plus grands, qu'on s'en peut servir pour l'une & l'autre intention; mais alors il faudroit, en suivant la maniere d'Henry Brigs, que la Table prenne plus d'espace d'un tiers, & par consequent seroit ce livre plus coustable. Dont, pour servir selon mon pouvoir principalement à ceux de ma Patrie, je l'ay voulu dispenser,

me semblant chose non necessaire pour l'usage commun. C'est aussi pourquoy j'ay fait changer en la Description, & en oster, voire adjouster cy & là quelque chose, mais le moins qu'ila esté possible pour seconder le changement de la Table. — Briggs war aber nicht ganz mit diesen Weglassungen und Abänderungen zufrieden; wie aus folgender Stelle der Trigonometriæ Britannicæ (Gouda 1633. S. §. 71. Note a.) Lib. I. Cap. XII. p. 37. erhellet: Modus correctionis a me traditus est Arithmeticæ Logarithmeticæ Capite 13. [12.] in Editione Londinensi: Istud autem Caput una cum sequenti in Editione Batava me inconsulto & inscio omissum fuit: nec in omnibus Editionis illius Author, Vir alioqui industrius & non indoctus, meam mentem videtur assequutus.

Sherwin's Mathematical Tables in gr. 8. wovon fünf Ausgaben zu London erschienen sind, die erste 1706, die dritte correcteste durch William Gardiner besorgte 1742, die fünfte von Samuel Clark veranstaltete, aber sehr fehlerhafte, 1771. (Hutton p. 40. Scheibel II. B. 11 St. S. 403. ff. Kästners Astron. Abh. II. Samml. S. 17. 36. ff. Geom. Abh. I. Samml. S. 490. ff.) enthalten Briggische Logarithmen der Zahlen von 1 bis 101000 bis auf sieben Decimalstellen ohne die Kennzifer. Sherwin sagt zwar in der Vorrede p. 3: As for the Table of Logarithms, it was examined from 1 to 20000 and from 90000 to 101000 by Mr. Briggs's Arith. Logar. printed at London 1624. — Hutton bemerkt hingegen p. 36: In 1624. Briggs produced his Arithmetica Logarithmica — Some writers say that there was another Chiliad (ausser den dreissig von 1 bis 20000, und von 90000 bis 100000), namely from 100000 to 101000: but none of the copies that i have seen have more than the 30000 above-mentioned, and they were all regularly terminated in the usual way with the word Finis.

Die vollständige Sammlung grösserer logarithmisch-trigonometrischer Tafeln, nach Adrian Vlack's Arithmetica Logarithmica und Trigonometria artificialis, verbessert, neu geordnet und vermehrt von Georg Vega, Major und Professor der Mathematik beym Kayserl. Königl. Bombardierkorps — (Leipzig 1794. fol.) giebt p. 3—207. die Briggischen Logarithmen der Zahlen von 1 bis 101000 in zehn Decimalzifern an; wovon Hr. Friedr. Dorfmund, Lieutenant des Kayserl. Königl. Artilleriekorps, die Logarithmen von 100000 bis 101000 unter der Aufsicht und Leitung des Hrn Major Vega berechnet hat (Einleitung p. XXI.)

Für die ersten 100 Zahlen finden sich Briggische Logarithmen bis auf 32 Decimalstellen in C. von Clausbergs Demonstrativer Rechenkunst — zweyte Auflage. Leipzig 1748. (zuerst 1732.) 8°. Vierter Theil. S. 1431 — 1434. mit folgender Vorerinnerung (§. 1474. S. 1431.): „Der grossen Bemühung ungeachtet, so habe ich doch bereits „vor 11 Jahren, als mir einige curiöse Aufgaben, die nicht „anders als durch Hülfe einer weit gröſſern logarithmischen „Tabelle, als des Vlacci grosse — haben aufgelöset werden „können, unter Händen gekommen, mich bei solcher Gelegen„heit nicht verdrieſſen lassen, eine neue Tabelle mit grossem „Fleisse und bis auf 32 Ziffern, ausser der Characteristica, „zu verfertigen. Ob ich zwar diese anfangs nur zu meinem „eigenen Gebrauch ausgearbeitet; so habe doch nunmehro re„solvirt, wenn sich durch Vorschub der Mathematicorum und „sonst Beförderer dieser Wissenschaft eine Gelegenheit zu ei„nem guten Verlage finden möchte, selbige zur völligen Per„fection zu bringen, und durch öffentlichen Druk an den Tag „zu legen. Zu dem Ende will ich allhier die ersten 100 Lo„garithmos gleichsam zur Probe darstellen. "(Kästners Astron. Abh. II. Samml. S. 46. ff.)

Will. Gardiner's Tables, London 1742. gr. 4°, und die Tables de Logarithmes, contenant les logarithmes des nombres depuis 1 jusqu'a, à 102 100, & les logarithmes des sinus & des tangentes, de 10 en 10 secondes, pour chaque degré du quart decercle, avec differentes autres tables publiées ci devant en Angleterre par Monsieur Gardiner: Nouvelle edition augmentée des logarithmes des sinus & tangentes pour chaque seconde des quatre premiers degrés (Avignon 1770. klein fol.) enthalten Briggische Logarithmen der Zahlen von 1 bis 102 100 meistens in sieben; nur die des ersten, 101ten, 102ten, und des Anfangs des 103ten Tausends, in acht Decimalziffern: eben diese Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 1000, und der ungeraden von 1000 bis 1161, mit 20 Decimalstellen; nebst zwey Hülfstafeln, um den Logarithmen jeder Zahl, und umgekehrt die zu jedem Logarithmen gehörige Zahl, bis auf 20 Decimalstellen zu finden. (Hutton p. 40. 134. sqq. Scheibel II. B. 11 St. S. 409. f. Kästners Astron. Abh. II. Samml. S. 18. ff. Geom. Abh. I. Samml. S. 489. f.)

Noch hat Gardiner in die oben erwähnte dritte Ausgabe von Sherwin's Mathematical Tables, auf p. 36—43. der of Logarithms, their invention and use betitelten zweyten Einleitung, Briggische von Abr. Scharp bis auf 61 Decimalstellen berechnete Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 100, und der Primzahlen von 101 bis 1100 eingerükt; mit einer

ren Einrichtung und Gebrauch in der höhern Mathematik vorkommt.

Hülfstafel um für jede Zahl den Logarithmen, und umgekehrt für jeden Logarithmen die Zahl bis auf 61 Decimalstellen berechnen zu können. (Kästners Astron. Abh. II. Samml. S. 44. f.)

Die Tables portatives de Logarithmes, publiées à Londres par Gardiner, augmentées & perfectionnées dans leur disposition par M. Callet — Paris 1783. 8°. enthalten Briggische Logarithmen der Zahlen von 1 bis 102960; die Tables portatives de Logarithmes — par François Callet, Edition stereotype — Paris 1795. gr. 8°. aber, von 1 bis 108000: worunter die der Zahlen von 1 bis 1200, und der von 100000 an, in acht; die der übrigen, in sieben Decimalziffern. In der zweyten Ausgabe stehen auch die vorhin erwähnten Gardinerischen zwanzig- und Sharpischen 61 Decimalstelligen Logarithmen; jene von 1 bis 1200 vollständig: mit den dazu gehörigen etwas erweiterten Hülfstafeln. Der ersten Ausgabe sind nur die Gardinerischen, und zwar von 1000 bis 1161 wie bey Gardiner, nebst den zwey vermehrten Hülfstafeln, beygefügt. (Kästners Geom. Abh. 1 Samml. S. 483. ff.)

Tafeln, wo die Logarithmen (wie in der Byrgischen, und der einen erst erwähnten Gardinerischen Hülfstafel) um gleiche Unterschiede wachsen, neben ihnen die dazu gehörigen Zahlen stehen, in denen man also einen berechneten Logarithmen aufsuchte, seine Zahl zu erfahren, nannte Wallis (Algebra Cap. 12.) einen Canon antilogarithmicus (Kästners Gesch. d. Math. III. B. S. 18. f.). Einen dergleichen vollständigen Canon für Briggische Logarithmen-Mantissen von fünf Decimalziffern mit dazu gehörigen Zahlen in eilf Decimalstellen hat James Dodson 1742. zu London in fol. herausgegeben (Hutton p. 40. sq. 119. sqq.) Auf vier Decimalstellen bey den Logarithmen, und auf sieben für die Zahlen beschränkt steht diese Tafel auch in The Calculator: being correct and necessary Tables for computation. Adapted to science, business and pleasure. By James Dodson, Accomptant, and Teacher of the Mathematics. London 1747. klein fol. p. 77—93.

(f) Wenn N irgend eine Zahl bedeutet; so ist

$$\text{Lg. Neper. } N = -10000000 \text{ Log. nat. } \frac{N}{10000000}$$

oder

$$\text{Lg. natur. } \frac{N}{10000000} = -\frac{1}{10000000} \text{ Lg. Neper } N;$$

$$\text{Lg. Brigg. } N = 0{,}4342944819\ldots \times \text{Lg. nat. } N$$

und

$$\text{Lg. natur. } N = 2{,}3025850929\ldots \times \text{Lg. Brigg. } N.$$

Da das Produkt zweyer Zahlen zu dem Multiplicandus daſſelbe geometriſche Verhältniß hat, welches der Mul-

(Käſtners Aſtron. Abh. II. Samml. 64 ff. Karſtens Lehrbegriff der geſammten Mathematik. II. Thl. I. Abh. 1786. S. 238. 248. f.)

John Speidell, welcher 1619. umgeſtaltete Neperiſche Logarithmen unter dem Titel New Logarithms herausgegeben, hat der ſechsten Auflage derſelben 1624. eine Tafel der Logarithmen der ganzen Zahlen von 1 bis 1000 beygefügt, in welcher Lg. N = 1000 000 Lg. nat. N. (Hutton p. 30.)

Hauſen (Elementa Matheseos. Lips. 1734. p. 72.), und Euler (Introd. in Anal. inf. Lausannæ 1748. Tom. I. p. 91.) haben natürliche Logarithmen der ganzen Zahlen von 1 bis 10, jener in 20, dieſer in 25 Decimalſtellen angegeben. Bey Eulern ſind aber die vier niedrigſten Ziffern in Lg. 7 unrichtig (Käſtners Geom. Abh. I. Samml. S. 489.)

Thom. Simpſon hat ſeiner Doctrine and application of fluxions (London, 1750.) eine Tafel der natürlichen Logarithmen aller von 1 bis 10 nach Hunderttheilen wachſenden Zahlen, d. h. der Zahlen 1.01, 1.02, 1.03, ... 9.98, 9.99, 10, in ſieben Decimalziffern, deren lezte aber oft unrichtig ſind, beygefügt; ſo daß dieſe Tafel die natürlichen Logarithmen der ganzen Zahlen von 101 bis 100 angiebt, wenn man den natürlichen Logarithmen von 100 addirt (Hutton p. 143. Lamberts Zuſäze zu den logarithmiſchen und trigonometriſchen Tabellen. Berlin 1770. S. 54.)

Lamberts Zuſäze enthalten, auſſer der Euleriſchen (S. 134.) und Simpſoniſchen Tafel (S. 125—133.), eine von ihm berechnete Tafel der hyperboliſchen Logarithmen der ganzen Zahlen von 1 bis 100 (S. 123.), und noch eine der nämlichen Logarithmen der erſten zehn Potenzen von 10 (S. 124.); beyde bis auf ſieben Decimalſtellen.

Die Simpſoniſche Tafel findet ſich, genauer berechnet, und mit den Logarithmen von 100, 1000, 10000, 100000 vermehrt, in der Avignoner Ausgabe von Gardiners Tafeln (1770); in Huttons Mathematical Tables (1785.); und, mit Weglaſſung der Logarithmen von 100, 1000, 10000, 100000, aber bis zum Logarithmen von 10,59 fortgeſezt, in den Tables portatives par M. Callet von 1783: die Logarithmen in allen auf ſieben Decimalſtellen beſchränkt.

Joh. Carl Schulze, wirklichen Mitglieds der königl. Preuß. Akad. d. Wiſſ. Neue und erweiterte Sammlung logarithmiſcher und anderer zum Ge-

tiplicator zur Einheit hat; weil das Product den Multiplicandus so vielmal enthalten muß, als der Multiplicator die Einheit enthält: so wird der Logarithme des Produkts zu dem Logarithmen des Multiplicandus dasselbe arithmetische Verhältniß haben, welches der Logarithme des Multiplicators zum Logarithmen der Einheit, d. i. zu 0 hat.

Gebrauch der Mathematik unentbehrlicher Tafeln (Berlin 1778. I. B. S. 190—258.), und des Hrn Major Vega vorhin erwähnte vollständige Sammlung gröſſerer logarithmisch-trigonometrischer Tafeln (S. 642—684.) enthalten die von dem Holländischen ArtillerieLieutenant, Hrn Wolfram, mit gröſter Sorgfalt und Mühe bis auf 48 Decimalstellen berechnete natürliche Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 2200, und von 2200 bis 10000 für die Prim- und etwas stark componirte Zahlen: jene am Ende mit einigen wenigen Lüken; diese mit Ergänzung der in der Schulzischen Sammlung abgängigen Stellen, und Berichtigung einiger darin übersehenen Fehler. (Lamberts deutscher gelehrter Briefwechsel. IV. B. Berlin 1784. S. 417. ff. 436—536. V. B. 2r Thl. Leipzig 1787. S. 344—464.)

In den Tables portatives de Logarithmes &c. par François Callet (Edition stereotype. 1795.) stehen, neben den 20 Decimalstelligen Briggischen Logarithmen der Zahlen von 1 bis 1200, welche die Seiten linker Hand einnehmen, eben so vielstellige hyperbolische Logarithmen derselben auf den Seiten rechter Hand; und ebenso wiederum neben den 61 Decimalstelligen Briggischen Logarithmen der Zahlen von 1 bis 100, und der Primzahlen von 101 bis 1100, derselben hyperbolische Logarithmen bis auf 48 Decimalstellen: nebst den zur Berechnung des hyperbolischen Logarithmen einer gegebenen Zahl, und umgekehrt der einem gefundenen hyperbolischen Logarithmen entsprechenden Zahl, bis auf 20 oder 48 Decimalstellen, erforderlichen Hülfstafeln.

Hr. Major Vega hat in dem IIten Band der zweyten Auflage seiner logarithmisch-trigonometrischen Tafeln (Leipzig 1797. 8o.) einer Tafel der natürlichen Logarithmen für alle auf einander folgende Zahlen von 1 bis 1000, und für die Primzahlen von 1000 bis 10000, mit acht Decimalziffern (S. 130—140.), eine umgekehrte Tafel (Canon antilogarithmicus) derselben beygefügt, welche für alle Hunderttheile der natürlichen Logarithmen von 0,01 bis 10,00 die zugehörigen Zahlen, nebst ihren Briggischen Logarithmen, enthält (S. 142—148.)

Folglich ist der Logarithme des Produkts zweyer Zahlen = Logar. des Multiplicandus + Log. des Multiplicators. Ferner ist der Logarithme eines Produkts von drey Faktoren a, b, c = der Summe der Logarithmen dieser Faktoren. Dieses Produkt ist nemlich $a \times b \times c$; folglich, nach dem eben bewiesenen, sein Logarithme = Log. $a \times b$ + Log. c. Aber Log. $a \times b$ = Lg. a + Lg. b, folglich Log. $a \times b \times c$ = Lg. a + Lg. b + Lg. c, u. s. f. Oder es seyen, nach der zweyten Definition der Logarithmen, m, n, p u. s. w. die Logarithmen der Faktoren a, b, c u. s. w. für die Basis B; also

$$a = B^m$$
$$b = B^n$$
$$c = B^p$$

u. s. w:

so ist $a \times b \times c = B^m \times B^n \times B^p = B^{m+n+p}$;

daher Lg. $a \times b \times c$ = Lg. a + Lg. b + Lg. c.

Da ferner ein Quotient zu dem Dividendus dasselbe geometrische Verhältniß hat, welches die Einheit zum Divisor hat; so wird der Logarithme des Quotienten zu dem Logarithmen des Dividendus dasselbe arithmetische Verhältniß haben, welches der Logarithme der Einheit oder 0 zu dem Logarithmen des Divisors hat. Folglich ist der Logarithme des Quotienten = Log. des Dividendus — Log. des Divisors. Oder: wenn

$$a = B^m$$
$$b = B^n;$$

so ist $\frac{a}{b} = \frac{B^m}{B^n} = B^{m-n}$, folglich

Log. $\left(\frac{a}{b}\right) = m - n =$ Lg. a - Lg. b.

Weil man jeden Bruch als den Quotienten der Division des Zählers durch seinen Nenner ansehen kann; so erhält man seinen Logarithmen, wenn man den Logarithmen des Nenners von dem des Zählers abzieht. Ist der Bruch

ein ächter, d. h. der Zähler $<$ Nenner, und folglich (insofern die Basis >1 ist) der Log. des Zählers $<$ Log. des Nenners: so wird ihre Differenz, und damit auch der Logarithme des Bruchs subtraktiv oder negativ. Wie man diese negativen Logarithmen in den Berechnungen vermeide, wird in der Folge, z. B. §. 23, gezeigt werden.

Den Logarithmen einer Potenz findet man, wenn man den Logarithmen der Wurzel mit dem Exponenten der Potenz multiplicirt. Es ist nemlich ein Potenz wie a nichts anders als ein Produkt von r Faktoren, deren jeder a ist; folglich ist ihr Logarithme die Summe, welche herauskommt, wenn man den Log. a zu ihm selbst rmal addirt, das heißt = Produkt r Lg. a.

Also Lg. $a^2 = 2$ Lg. a; Lg. $a^3 = 3$ Lg. a; u. s. w.

Endlich erhält man den Logarithmen einer Wurzel, wenn man den Logarithmen der Potenz mit dem Exponenten der Wurzel dividirt. Denn es sey

$$a^r = A, \text{ folglich } a = \sqrt[r]{A};$$

so ist Lg. a^r d. h. r Lg. a = Lg. A

und Lg. a oder Lg. $\sqrt[r]{A} = \frac{\text{Lg. A}}{r}$.

Also Lg. $\sqrt{A} = \frac{1}{2}$ Lg. A; Lg. $\sqrt[3]{A} = \frac{1}{3}$ Lg. A; u. s. w.

In dem System der gemeinen oder Briggischen Logarithmen, das für die Basis 10 berechnet ist, oder sich auf die geometrische Progression

1, 10, 100, 1000, 10000, u. s. w.

gründet, haben nur die Glieder dieser Progression selbst oder die Potenzen von 10 genaue Logarithmen. Die der übrigen Zahlen sind durch Näherung in ganzen Zahlen und Decimalbrüchen angegeben. Der ganze Theil eines solchen Logarithmen heißt seine Kennziffer oder Charakteristik; und die Reihe der angehängten Decimaltheile, seine Mantisse. In diesem System richtet sich die Kennziffer der Logarithmen allein nach der Anzahl der ganzen Ziffern der Zah-

len, zu welchen sie gehören; und die Mantisse hängt nur von der Beschaffenheit der Ziffern dieser Zahlen und der Ordnung ab, in welcher sie aufeinander folgen, ohne Rükſicht auf ihren absoluten Lokalwerth: so daß im allgemeinen die Kennziffer des Logarithmen so viele Einheiten, weniger eine, enthält, als die Zahl, zu welcher er gehört, ganze Ziffern hat; und daß die Logarithmen der Zahlen, welche sich zu einander verhalten wie 10 oder irgend eine Potenz von 10 zu 1, einerley Mantisse haben, und nur in der Kennziffer verschieden sind. Denn alle Zahlen, welche nur eine ganze Ziffer haben, sind zwischen 0 und 1 enthalten; daher ist ihre Kennziffer 0. Die Zahlen, welche zwey ganze Ziffern haben, sind zwischen 10 und 100 enthalten: ihre Logarithmen fallen also zwischen 1 und 2; folglich ist ihre Kennziffer 1 u. s. w. In ebendiesem System ist:

$$\text{Lg. } 10a = \text{Lg. } 10 + \text{Lg. } a = \text{Lg. } a + 1$$
$$\text{Lg. } 100a = \text{Lg. } 100 + \text{Lg. } a = \text{Lg. } a + 2$$
$$\text{Lg. } 1000a = \text{Lg. } 1000 + \text{Lg. } a = \text{Lg. } a + 3$$
u. s. w.

und
$$\text{Lg. } \tfrac{a}{10} = \text{Lg. } a - \text{Lg. } 10 = \text{Lg. } a - 1$$
$$\text{Lg. } \tfrac{a}{100} = \text{Lg. } a - \text{Lg. } 100 = \text{Lg. } a - 2$$
$$\text{Lg. } \tfrac{a}{1000} = \text{Lg. } a - \text{Lg. } 1000 = \text{Lg. } a - 3$$
u. s. w.

Man sieht hieraus, daß im allgemeinen die Multiplication oder Division irgend einer Zahl mit 10 oder einer Potenz von 10 nur den ganzen Theil oder die Kennziffer ihres Logarithmen vermehrt oder vermindert, ohne seine Mantisse zu ändern.

Zu mehrerer Bequemlichkeit bey trigonometrischen Rechnungen hat man auch die Logarithmen der Zahlen berechnet, durch welche die Sinus genau oder durch Näherung nicht nur in Zehentausend-Theilchen, sondern in Zehentausend-Million-Theilchen des Halbmessers ausgedrükt sind; und solche neben diese Zahlen in den Tafeln der Sinus gesezt. Daher ist in denselben der Log. sin. tot. = 10. Man hat

ein ächter, d. h. der Zähler < Nenner, und folglich (insofern die Basis > 1 ist) der Log. des Zählers < Log. des Nenners: so wird ihre Differenz, und damit auch der Logarithme des Bruchs subtraktiv oder negativ. Wie man diese negativen Logarithmen in den Berechnungen vermeide, wird in der Folge, z. B. §. 23, gezeigt werden.

Den Logarithmen einer Potenz findet man, wenn man den Logarithmen der Wurzel mit dem Exponenten der Potenz multiplicirt. Es ist nemlich ein Potenz wie a^r nichts anders als ein Produkt von r Faktoren, deren jeder a ist; folglich ist ihr Logarithme die Summe, welche herauskommt, wenn man den Log. a zu ihm selbst rmal addirt, das heißt = Produkt r Lg. a.

Also Lg. $a^2 = 2$ Lg. a; Lg. $a^3 = 3$ Lg. a; u. s. w.

Endlich erhält man den Logarithmen einer Wurzel, wenn man den Logarithmen der Potenz mit dem Exponenten der Wurzel dividirt. Denn es sey

$$a^r = A, \text{ folglich } a = \sqrt[r]{A};$$

so ist Lg. a^r d. h. r Lg. a = Lg. A

und Lg. a oder Lg. $\sqrt[r]{A} = \frac{\text{Lg. A}}{r}$.

Also Lg. $\sqrt{A} = \frac{1}{2}$ Lg. A; Lg. $\sqrt[3]{A} = \frac{1}{3}$ Lg. A; u. s. w.

In dem System der gemeinen oder Briggischen Logarithmen, das für die Basis 10 berechnet ist, oder sich auf die geometrische Progression

1, 10, 100, 1000, 10000, u. s. w.

gründet, haben nur die Glieder dieser Progression selbst oder die Potenzen von 10 genaue Logarithmen. Die der übrigen Zahlen sind durch Näherung in ganzen Zahlen und Decimalbrüchen angegeben. Der ganze Theil eines solchen Logarithmen heißt seine Kennziffer oder Charakteristik; und die Reihe der angehängten Decimaltheile, seine Mantisse. In diesem System richtet sich die Kennziffer der Logarithmen allein nach der Anzahl der ganzen Ziffern der Zahl

len, zu welchen sie gehören; und die Mantisse hängt nur von der Beschaffenheit der Ziffern dieser Zahlen und der Ordnung ab, in welcher sie aufeinander folgen, ohne Rükſicht auf ihren absoluten Lokalwerth: so daß im allgemeinen die Kennziffer des Logarithmen so viele Einheiten, weniger eine, enthält, als die Zahl, zu welcher er gehört, ganze Ziffern hat; und daß die Logarithmen der Zahlen, welche sich zu einander verhalten wie 10 oder irgend eine Potenz von 10 zu 1, einerley Mantisse haben, und nur in der Kennziffer verschieden sind. Denn alle Zahlen, welche nur eine ganze Ziffer haben, sind zwischen 0 und 1 enthalten; daher ist ihre Kennziffer 0. Die Zahlen, welche zwey ganze Ziffern haben, sind zwischen 10 und 100 enthalten: ihre Logarithmen fallen also zwischen 1 und 2; folglich ist ihre Kennziffer 1 u. s. w. In ebendiesem System ist:

$$\text{Lg. } 10a = \text{Lg. } 10 + \text{Lg. } a = \text{Lg. } a + 1$$
$$\text{Lg. } 100a = \text{Lg. } 100 + \text{Lg. } a = \text{Lg. } a + 2$$
$$\text{Lg. } 1000a = \text{Lg. } 1000 + \text{Lg. } a = \text{Lg. } a + 3$$
u. s. w.

und
$$\text{Lg. } \tfrac{a}{10} = \text{Lg. } a - \text{Lg. } 10 = \text{Lg. } a - 1$$
$$\text{Lg. } \tfrac{a}{100} = \text{Lg. } a - \text{Lg. } 100 = \text{Lg. } a - 2$$
$$\text{Lg. } \tfrac{a}{1000} = \text{Lg. } a - \text{Lg. } 1000 = \text{Lg. } a - 3$$
u. s. w.

Man sieht hieraus, daß im allgemeinen die Multiplication oder Division irgend einer Zahl mit 10 oder einer Potenz von 10 nur den ganzen Theil oder die Kennziffer ihres Logarithmen vermehrt oder vermindert, ohne seine Mantisse zu ändern.

Zu mehrerer Bequemlichkeit bey trigonometrischen Rechnungen hat man auch die Logarithmen der Zahlen berechnet, durch welche die Sinus genau oder durch Näherung nicht nur in Zehentausend-Theilchen, sondern in Zehentausend-Million-Theilchen des Halbmessers ausgedrükt sind; und solche neben diese Zahlen in den Tafeln der Sinus gesezt. Daher ist in denselben der Log. sin. tot. = 10. Man hat

also nicht nöthig, zuerst die Zahl, welche den Sinus ausdrükt, und alsdann den Logarithmen dieser Zahl aufzusuchen, sondern man findet sogleich in den Tafeln den einem Winkel entsprechenden Log. Sinus; und umgekehrt.

§. 18.

Wir wollen nun die bisher erklärten Grundsäze auf die ausführliche Berechnung der Dreyeke nach den §. 1. aufgezählten Bestimmungsstüken anwenden, und zwar erstlich auf den Fall, wenn eine Seite des Dreyeks und zwey Winkel, folglich auch (§. 1. 32.) der dritte Winkel gegeben sind, welcher Fall also den 4ten und 5ten §. 1. vorgegebenen enthält. Sind nämlich die Winkel des Dreyeks ABC (*Fig.* 11, 12.) und die Seite AB gegeben; und fällt man auf diese aus der Spize C des gegenüberliegenden Winkels das Perpendikel CD, wenn keiner der an der gegebenen Seite liegenden Winkel ein rechter ist: so sind (§. 10. 13.)

$$\sin.ACB : \sin.A = AB : BC \quad \text{daher} \quad BC = \frac{\sin.A}{\sin.ACB} AB$$

$$\sin.ACB : \sin.B = AB : AC \quad AC = \frac{\sin.B}{\sin.ACB} AB$$

$$\sin.tot : \left\{\begin{matrix}\sin.A = AC\\ \sin.B = BC\end{matrix}\right\} : CD \quad CD = \left\{\begin{matrix}\frac{\sin.A}{\sin.tot.} AC\\ \frac{\sin.B}{\sin.tot.} BC\end{matrix}\right.$$

folglich $\sin.tot. \sin.ACB : \sin.A \sin.B = AB : CD$

$$\text{daher } CD = \frac{\sin.A \sin.B}{\sin.tot. \sin.ACB} AB$$

und $\sin.tot. \sin.ACB : \sin.A \sin.B = \frac{1}{2}AB^q : \left\{\begin{matrix}\frac{1}{2}AB \times CD\\ \text{Inhalt des}\end{matrix}\right.$

folglich Inhalt des Dreyeks $= \frac{\sin.A \sin.B}{2 \sin.tot. \sin.ACB} AB^q$

§. 19.

Wenn einer der zwey an der gegebenen Seite AB (Fig. 13.) liegenden Winkel, z. B. der Winkel BAC, ein rechter ist; so haben folgende Proportionen statt, die sich beyde aus

der Betrachtung des rechtwinklichten Dreyeks selbst, und aus den auf diesen Fall angewandten vorhergehenden Proportionen (§. 18.) ergeben:

$$\sin.ACB : \sin.tot. = AB : BC$$

$$\sin.ACB : \sin.ABC = AB : AC$$

und ebenso $\sin.ACB : \sin.ABC = \frac{1}{2}AB^q : \begin{cases} \frac{1}{2}AB \times AC \\ \text{Inhalt d. } \Delta. \end{cases}$

Eine kürzere Auflösung dieser Aufgabe kommt unten §. 93. vor. Man sehe auch §. 31.

§. 20.

Sind (*Fig.* 11.) die zwey Winkel des Dreyeks einander gleich, deren einer A an der gegebenen Seite AB, der andere ACB ihr gegenüber liegt: so ist unmittelbar auch die Seite BC = AB gegeben (El. I, 6); für die Seite AC bleibt die Proportion §. 18; aber wegen BC = AB wird

$$\sin.tot : \sin.B = \begin{cases} AB : CD \\ \frac{1}{2}AB^q : \frac{1}{2}AB \times CD \text{ oder Inh. } \Delta. \end{cases}$$

§. 21.

Sind aber die zwey an der gegebenen Seite AB des Dreyeks (*Fig.* 14.) liegenden Winkel A und B einander gleich: so ist AC = BC (El. I, 6); und das Perpendikel CD halbirt sowohl die Grundlinie AB, als den Winkel an der Spize ACB (El. I, 26.). Daher

$$\sin.\tfrac{1}{2}ACB : \sin.tot. = \tfrac{1}{2}AB : AC \text{ oder } BC$$

und $\sin.\frac{1}{2}ACB : \sin.A = \begin{cases} \frac{1}{2}AB : CD \\ \frac{1}{4}AB^q : \frac{1}{2}AB \times CD \text{ od. Inh. } \Delta \end{cases}$

Man s. auch §. 57.

§. 22.

Wenn endlich die drey Winkel des Dreyeks (*Fig.* 15.) einander gleich sind, jeder = $\frac{2}{3}$ eines rechten = 60°: so sind auch die Seiten AC = BC = AB (El. I, 6 Schol.); und, weil die Grundlinie AB von dem Perpendikel CD halbirt

wird, ist $CD^q = \frac{3}{4} AB^q$ (El. I, 47.) oder

$4 : 3 = AB^q : CD^q$

daher $2 : \sqrt{3} = \begin{cases} AB : CD \\ \frac{1}{2}AB^q : \frac{1}{2}AB \times CD \text{ od. Inh. } \Delta. \end{cases}$

oder $4 : \sqrt{3} = AB^q :$ Inhalt des Dreyecks.

§. 23.

1.) Beyspiel. *Fig.* 11.

Es sey die Seite $AB = 120$ Fuß

und die Winkel $\begin{cases} A = 38^b 40' \\ B = 57\ 50 \end{cases}$

$96\ 30$

$179\ 60$

folgl. der Wink. $ACB = 83\ 30$

Lg. $AB = 12{,}0791812\text{-}10$

Lg. sin. $ACB = 9{,}9971993$

$2{,}0819819\text{-}10$

Lg. sin. $B = 9{,}9276285$

Lg. sin. $A = 9{,}7957330$

Lg. $AC = 2{,}0096104$ folglich $AC = 102{,}238$ Fuß

Lg. $BC = 1{,}8777149$ $BC = 75{,}460$

Lg. $CD = 1{,}8053434$ $CD = 63{,}877$

Lg. $AB = 2{,}0791812$

$3{,}8845246$

Lg. $2 = 0{,}3010300$

Lg. $\Delta ABC = 3{,}5834946$ $\Delta ABC = 3832{,}6099$ Qdr. F.

2.) Beyspiel. *Fig.* 12.

Es sey die Seite $AB = 135$ Fuß.

und die Winkel $\begin{cases} BAC = 128^\circ 25' \\ B = 24\ 30 \end{cases}$

$152\ 55$

$179\ 60$

folglich der Winkel $ACB = 27\ 5$

$179^\circ 60'$

$BAC = 128\ 25$

$DAC = 51\ 35$

Lg. AB = 12,1303338-10
Lg. sin. ACB = 9,6582842
2,4720496-10
Lg. sin. B = 9,6177270
Lg. sin. A = 9,8940461
Lg. AC = 2,0897766 folglich AC = 122,964 Fuß
Lg. BC = 2,3660957 BC = 232,325
Lg. CD = 1,9838227 CD = 96,343
Lg. AB = 2,1303338
4,1141565
Lg. 2 = 0,3010300
Lg. △ABC = 3,8131265 △ABC = 6503,190 Q.F.

3.) Beyspiel zu §. 22. *Fig.* 15.

Es sey AB = 237 Fuß.
folglich $\frac{1}{2}$AB = 118$\frac{1}{2}$ = 118,5 Fuß.
Lg. $\frac{1}{2}$AB = 2,0737184
$\frac{1}{2}$Lg. 3 = 0,2385606
Lg. CD = 2,3122790 folglich CD = 205,248 Fuß.
Lg. $\frac{1}{2}$AB = 2,0737184
Lg. △ABC = 4,3859974 △ABC = 24321,9 Q.F.

Anmerkungen über die Berechnung der vorhergehenden Beyspiele.

1. Weil $AC = \frac{\text{sin. B}}{\text{sin. ACB}}$ AB (§. 18.)

und $BC = \frac{\text{sin. A}}{\text{sin. ACB}}$ AB;

folgl. Lg. AC = Lg. AB + Lg. sin. B - Lg. sin. ACB
Lg. BC = Lg. AB + Lg. sin. A - Lg. sin. ACB:

so hat man die Berechnung dadurch um eine Operation abgekürzt, daß man zuerst den Lg. sin. ACB von Lg. AB abzog, und hierauf zum Rest das einemal Lg. sin. B, das andere mal Lg. sin. A addirte; indem die vorhergehenden Ausdrüke gleichbedeutend sind mit den folgenden:

Lg. AC = Lg. AB - Lg. sin. ACB + Lg. sin. B
Lg. BC = Lg. AB - Lg. sin. ACB + Lg. sin. A.

Da aber Log. sin. ACB gröſſer iſt als Lg. AB: ſo leiht man, um den erſten von dem leztern abziehen zu können, dieſem inzwiſchen 10, oder man ſezt Lg. AB = 12,0791812 - 10; und bringt hernach dieſe geliehene 10 in Rechnung, oder zieht ſie wieder ab, wenn man zu dem Reſt die Logg. der Sinus von B und A addirt. Um daß nicht zu vergeſſen, hängt man dieſe 10 an die Logarithmen mit dem Zeichen - an.

2.) Nach der Art, wie die Berechnung angeordnet iſt, kann man unmittelbar die Logarithmen von AC und des Sin. A, oder von BC und des Sin. B zu einander addiren, ohne nöthig zu haben, ſie zu wiederholen; und läßt man 10 = Lg. sin. tot. von ihrer Summe weg, ſo hat man unmittelbar Lg. CD.

3.) Lg. AC = 2,0096104 findet ſich nicht in den Tafeln; aber er fällt zwiſchen Lg. 102 = 2,0086002,
und Lg. 103 = 2,0128372:
folglich iſt AC > 102 Fuß, und < 103 Fuß.

Man kann ſogleich noch die Zehentheile eines Fußes finden, welche AC enthält, wenn man bemerkt: daß Lg. 1022 = 3,0094509 alſo Lg. 102,2 = 2,0094509
Lg. 1023 = 3,0098756 Lg. 102,3 = 2,0098756;
woraus folgt, daß AC > 102,2 und < 102,3 Fuß.

Um vermittelſt der kleinen, gemeinen Logarithmentafeln, die nur bis auf die Zahl 10000 ſich erſtreken, auch noch die Hunderttheile und Tauſendtheile eines Fußes zu finden, welche AC enthält; verfährt man auf folgende Art. Weil

Lg. 102,3 = 2,0098756
Lg. AC = 2,0096104
Lg. 102,2 = 2,0094509

folglich der Ueberſchuß des Lg. 102,3 über Lg. 102,2 = 0,0004247
und der Ueberſchuß des Log. AC über Lg. 102,2 = 0,0001595;

so schließt man durch eine Proportion, die zwar nicht nach aller Schärfe, doch sehr nahe wahr ist (Man sieht nemlich aus den Tafeln, daß die Unterschiede der Logarithmen nicht genau den Unterschieden der ihnen entsprechenden Zahlen proportional sind, daß sich aber die beyden Verhältnisse der Gleichheit desto mehr nähern, je kleiner die Unterschiede der Logarithmen sind): daß

$\frac{4247}{10000000} : \frac{1595}{10000000}$ } $= \frac{1}{10}$ oder 100 Tausendtheilchen
oder 4247 : 1595 }

	100	1 Ueberschuß von AC über 102,2 Fuß in Tausendtheilchen ausgedrükt.
folglich ist 4247	159500	
	12741	dieser Ueberschuß
	32090	= {37 + Tausendtheilch.
	29729	{38 − eines Fußes.
	2361	

Da aber der Rest 2361 > ist als die Hälfte des Divisors 4247; so nähert sich ebendieser Ueberschuß mehr 38 als 37 Tausendtheilchen eines Fußes: also ist AC = 102,238 Fuß beynahe.

Durch größere Logarithmentafeln, welche sich bis auf 100000 erstreken, könnte man sogleich noch die Hundertheile eines Fußes finden. Es ist nemlich

Lg. 10223 = 4,0095784 also Lg. 102,23 = 2,0095784
Lg. 10224 = 4,0096208 Lg. 102,24 = 2,0096208
mithin AC > 102,23 und < 102,24 Fuß.

Die Tausendtheilchen und Zehentausendtheilchen eines Fußes könnte man ferner auf die vorhin angezeigte Art finden. Zu mehrerer Bequemlichkeit hat man aber folgende Einrichtung gemacht.

Da, wenn die Zahl 10223 um eine Einheit wächst, ihr Logarithme um 424 Zehenmillionntheilchen zunimmt, so wird, wenn obige Zahl um $\frac{1}{10}$ wächst, ihr Logarithme um 42,4 Zehenmilliontheilchen wachsen, folglich bey einem Wachsthum von $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$ u. s. w. um 84,8; 127,2 u. s. w. so daß man folgende einander entsprechende Zunahmen der Zahl und ihres Logarithmen haben wird:

Zunahme der Zahl	1 Zehnth.	Zunahme des Log.	42,4
	2 —	— — —	84,8
	3 —	— — —	127,2
	4 —	— — —	169,6
	5 —	— — —	212,0
	6 —	— — —	254,4
	7 —	— — —	296,8
	8 —	— — —	339,2
	9 —	— — —	381,6

Dergleichen kleine Tafeln der Proportionaltheile hat man den Logarithmen der Zahlen mit Weglaſſung der Decimalziffern und Vermehrung der nächſt vorhergehenden Ziffer um eine Einheit, wenn die weggelaſſene Ziffer größer als 5 war, zur Seite geſezt, alſo in gegenwärtigem Fall

1	42
2	85
3	127
4	170
5	212
6	254
7	297
8	339
9	382

Da nun der Ueberſchuß des gegebenen Logarithmen über den Logarithmen von 10223 = 320 iſt, ſo ſieht man ſogleich aus der Tafel der Proportionaltheile, daß die dieſem Ueberſchuß entſprechende Zunahme der Zahl 10223 größer iſt als $\frac{7}{10}$ und kleiner als $\frac{8}{10}$. Weil aber die Differenz 320 der 339 näher kommt als der 297, ſo iſt die dem Logarithmen 4,0096104 entſprechende Zahl beynahe = 10223,8, folglich AC = 102,238 Fuß.

Ebenſo, weil Lg. 3833 = 3,5835388
Lg. ΔABC = 3,5834946
Lg. 3832 = 3,5834255

alſo der Ueberſchuß des Log. 3833 über Log. 3832	=	0,0001133
und der Ueberſchuß des Log. ΔABC über Log. 3832	=	0,0000691

schließt man

$\left.\begin{matrix}\frac{1133}{10000000} : \frac{691}{10000000}\end{matrix}\right\} = 1$ oder 10000000 Zehentausendtheilchen

oder 1133 : 691 } = 1 Ueberschuß des ΔABC über 3832 Q.F. ausgedrükt in Zehenmillionentheilchen eines Qdr.F.

10000 :

1133) 6910000 | dieser Ueberschuß = 0,6098 +
6798
11200
10197
10030
9064

folglich ist

und der Inhalt des Dreyeks ABC = 3832,6099 Q. F. beynahe.

4.) In dem 2ten Beyspiel ist der Winkel A stumpf und

= 128°25'
179 60

folglich sein Supplement = 51 35
dessen Lg. sin. = Lg. sin. 128°25 (§. 14.)

5) Für das Beyspiel zu §. 22 hat man

$CD = \frac{1}{2}AB \times \sqrt{3}$

Inhalt des $\Delta = \frac{1}{4}AB^q \times \sqrt{3} = (\frac{1}{2}AB)^q \times \sqrt{3}$

folglich Lg. $CD = Lg.\frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}Lg.3$

$Lg.\Delta ABC = 2Lg.\frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}Lg.3$

ferner, da $AB = 237$ folgl. $\frac{1}{2}AB = 118\frac{1}{2} = \left\{\begin{matrix}118\frac{5}{10}\\118,5\end{matrix}\right\} = \frac{1185}{10}$

so ist $Lg.\frac{1}{2}AB = Lg.1185 - Lg.10 = Lg.1185 - 1$

oder man sucht den Lg. 118,5 ohne Rükſicht auf den absoluten Lokalwerth der Ziffern, als ob 118,5 eine ganze Zahl wäre, und bestimmt die Kennziffer nach der Anzahl der ganzen Ziffern. (S. §. 17. am Ende.)

Uebrigens würde man dasselbe gefunden haben, wenn man dieses Beyspiel nach §. 21 berechnet hätte. Man hätte die Proportion gehabt:

$\sin. 30° : \sin. 60° = \frac{1}{2}AB : CD.$

Aber nach §. 4. ist das Quadrat der Chorde von 120° = $\frac{3}{4}$ vom Quadrat des Durchmessers, und die Chorde von 60° = $\frac{1}{2}$ Durchmesser (El. IV, 15.): folglich verhält sich in demselben Kreis

Quadr. der Chorde von 60° : Quadr. Chorde 120° = $\left\{\begin{matrix}\frac{1}{4} : \frac{3}{4} \\ 1 : 3\end{matrix}\right.$

daher Chorde von 60° : Chorde von 120°
sin. 30° : sin. 60°
$\frac{1}{2}$AB : CD
$\Big\}$ = 1 : $\sqrt{3}$

mithin CD = $\frac{1}{2}$AB × $\sqrt{3}$

§. 24.

Ebenso leicht ist die Auflösung des Falls, wo zwey Seiten (*Fig.* 11. 12.) AB, BC des Dreyeks und ein Winkel CAB gegeben sind, der einer der gegebenen Seiten gegenüber liegt; wenn zugleich die Art des Winkels ACB, welcher der andern gegebenen Seite gegenüber liegt, entweder noch besonders angegeben, oder schon durch die drey gegebenen Stüke selbst bestimmt wird. Lezteres hat statt, wenn der gegebene Winkel CAB ein stumpfer oder ein rechter ist; oder wenn im allgemeinen die gegebene Seite BC, welche dem gegebenen Winkel CAB gegenüber liegt, nicht kleiner ist als die andere gegebene Seite: in allen diesen Fällen muß nemlich der Winkel ACB spiz seyn (El. I, 5. 18. 32.) Nun ist (§. 10. 13.) BC : AB = sin. A : sin. ACB folglich wird man, weil (Voraussez.) die Art des Winkels ACB gegeben ist, aus seinem durch die Rechnung gefundenen Sinus vermittelst der Tafeln den Winkel ACB, und (El. I, 32.) auch den dritten Winkel B des Dreyeks haben. Kennt man dieſen; ſo ſind ferner

sin. A : sin. B = BC : AC

sin. tot. sin. B = $\left\{\begin{matrix}\text{BC : CD} \\ \frac{1}{2}\text{AB} \times \text{BC} : \frac{1}{2}\text{AB} \times \text{CD}\end{matrix}\right.$ od. Inh.

§. 25.

Wenn der gegebene Winkel CAB spiz, und die gegebene ihm gegenüber liegende Seite BC kleiner ist als di

andere gegebene Seite AB; die Art des dieser Seite gegenüberliegenden Winkels ACB aber nicht zugleich bekannt ist: so läßt es der durch die erste Proportion §. 24. gefundene Sin. ACB (wenn er $< 10\,000\,000$, oder wenn sein Logarithme < 10 ist) unentschieden, ob für den Winkel ACB der spize Winkel zu nehmen sey, den man dem gegebenen Sinus in den Tafeln entsprechend findet; oder der stumpfe, sein Supplement; weil derselbe Sinus zu beyden gehört (§. 14.) Aber diese Zweydeutigkeit ist kein Fehler des trigonometrischen Calculs: sondern sie folgt aus der Beschaffenheit der Aufgabe selbst, welche nun nicht vollkommen bestimmt ist; und der Calcul hat sie mit der geometrischen Construktion gemein, welche vermittelst des Durchschnitts eines gegebenen Kreises mit einer der Lage nach gegebenen geraden Linie bewerkstelligt werden muß. Der Calcul läßt das, was die Geometrie nicht entscheidet, ebenfalls unbestimmt.

§. 26.

Wenn in der vorhergehenden Aufgabe der gegebene Winkel CAB (*Fig.* 13.) ein rechter ist; so wird die dritte Seite AC und daher auch der Inhalt des Dreyeks unmittelbar aus den gegebenen Seiten AB, BC durch Elem. I, 47. geschlossen. Man hat nemlich

$$AC^q = BC^q - AB^q$$

$$= (BC+AB)(BC-AB); \text{ (El. II, 5 Sch. 1)}$$

folglich $AC = \sqrt{(BC+AB)(BC-AB)}$,

$$\left.\begin{matrix} \frac{1}{2}AB.AC \\ \text{oder } \Delta ABC \end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{2}AB\sqrt{(BC+AB)(BC-AB)}$$

Die Winkel betreffend, ist in diesem Fall

$$BC : AB = \text{sin. tot.} : \text{sin. } ACB;$$

und der Ueberschuß von 90° über den gefundenen spizen Winkel ACB giebt den Winkel ABC. Vgl. §. 33.

§. 27.

Sind in diesem Fall (§. 24.) die zwey gegebenen Seiten AB, BC des Dreyeks (*Fig.* 11.) einander gleich: so

kennt man aus dem gegebenen Winkel CAB unmittelbar den ihm gleichen Winkel ACB (El. I, 5.); und die Aufgabe reducirt sich auf den §. 20. abgehandelten Fall.

§. 28.

1. Beyspiel. *Fig.* 11.

Es seyen die Seiten $\begin{cases} AB = 181\frac{1}{2} \text{ Fuß} \\ BC = 187\frac{2}{3} \end{cases}$ u. d. Winkel $A = 78°45'$.

daher Lg. sin. A = 9,9915739
Lg. AB = 2,2588766
12,2504505
Lg. BC = 2,2733871
Lg. sin. ACB = 9,9770634 folglich der Winkel
ACB = 71° 32' 31",8
BAC + ACB = 150 17 31,8
179 59 60,0
und der Winkel B = 29 42 28,2

Hieraus Lg. sin. B = 9,6951115
Lg. BC = 2,2733871
11,9684986
Lg. sin. A = 9,9915739
Lg. sin. tot. = 10,
Lg. AC = 1,9769247 folglich AC = 94,825 Fuß.
Lg. CD = 1,9684986
Lg. AB = 2,2588766
4,2273752
Lg. 2 = 0,3010300
Lg. ΔABC = 3,9263452 ΔABC = 8440,0538 Qf.

2. Beyspiel. *Fig.* 12.

$AB = 123\frac{3}{4}$ Fuß $= \frac{495}{4}$ Fuß
$BC = 172\frac{5}{6}$ Fuß $= \frac{1037}{6}$ Fuß

BAC = 117° 42'
179 60
DAC = 62 18

Lg. 495 = 2,6946052
Lg. 4 = 0,6020600
Lg. AB = 2,0925452
Lg. sin. A = 9,9471364
12,0396816
Lg. 1037 = 3,0157788
Lg. 6 = 0,7781513
Lg. BC = 2,2376275
Lg. sin. ACB = 9,8020541 folgl. ACB = 39°20'31",4-
Lg. AB = 2,0925452 BAC = 117 42 0
2,2904911-10 157 23 1,4
Lg. sin. B = 9,5911262 179 59 60
Lg. AC = 1,8816173 folglich B = 22 57 28,6+
Lg. sin. B = 9,5911262 AC = 76,141 Fuß.
Lg. BC = 2,2376275
Lg. CD = 1,8287537 . CD = 67,4145 Fuß
Lg. AB = 2,0925452
3,9212989
Lg. 2 = 0,3010300
Lg. ΔABC = 3,6202689 ΔABC = 4171,272 Quadr. F.

Oder man sucht, wie in dem 1. Beyspiel, AC auf folgende Art:

Lg. BC = 2,2376275
Lg. sin. A = 9,9471364
2,2904911-10
Lg. sin. B = 9,5911262
Lg. AC = 1,8816173 wie oben.

3. Beyspiel. *Fig.* 13. §. 26.

Es sey BC = 250½ Fuß* = 250$\frac{3}{6}$ Fuß
AB = 152½ Fuß = 152$\frac{3}{6}$
folglich BC + AB = 402$\frac{5}{6}$ = $\frac{2417}{6}$
BC - AB = 97$\frac{5}{6}$ = $\frac{587}{6}$

Lg. AB = 2,1832698
Lg. sin. A = 10,
Lg. BC = 2,3985186
Lg. sin. ACB = 9,7847512 ACB = 37°31'50",9
89 59 60
ABC = 52 28 9,1

Lg. 2417 = 3,3832767
Lg. 587 = 2,7686381
Lg. 6 = 0,7781513
Lg.(BC+AB = 2,0051254
Lg.(BC-AB) = 1,9904868
Lg. AC² = 4,5956122
Lg. AC = 2,2978061 folglich AC = 198,521 Fuß.
Lg. AB = 2,1832698
4,4810759
Lg. 2 = 0,3010300
Lg. ΔABC = 4,1800459 ΔABC = 15137,21 Qubr. F.

Anmerkungen über die Berechnung der vorhergehenden Beyspiele.

1.) Weil $AB = 181\frac{1}{2} = 181,5 = \frac{1815}{10}$ Fuß
und Lg. 1815 = 3,2588766
Lg. 10 = 1,
so ist Lg. AB = 2,2588766
und weil $BC = 187\frac{2}{3} = \frac{563}{3}$ Fuß
Lg. 563 = 2,7505084
Lg. 3 = 0,4771213
so ist Lg. BC = 2,2733871

2.) Lg. sin. ACB = 9,770634 findet sich nicht in den Tafeln; fällt aber zwischen Lg. sin. 71°33' = 9,9770832, und Lg. sin. 71 32 = 9,9770410; folglich ist der Winkel ACB < 71°33' und > 71°32' (Weil nemlich BC > AB so ist der Winkel ACB spiz.)

Sezt man den Winkel ACB = 71°32'
so wird, weil der Winkel A = 78 45
150 17
179 60
der Winkel B = 29 43

Also Lg. sin. B = 9,6952288
Lg. BC = 2,2733871
11,9686159
Lg. sin. A = 9,9915739
Lg. sin. tot. = 10,
Lg. AC = 1,9770420 hieraus AC = 94,851 F.
Lg. CD = 1,9686159
Lg. AB = 2,2588766
4,2274925
Lg. 2 = 0,3010300
Lg. ΔABC = 3,9264625 ΔABC = 8442,3340 Q. F.

Dieser Flächeninhalt des Dreyeks ist um mehr als 2 Quadratfuß von dem vorhin gefundenen unterschieden.

Ob also gleich der genäherte Werth des Winkels ACB in Minuten in Beziehung auf diesen Winkel selbst hinreichend seyn kann; so ist es doch für die daraus entstehenden Folgen und für die Fortsezung der Rechnung wichtig, seine Größe durch eine schärfere Näherung zu bestimmen. Dieß geschieht auf eine Art, welche der (§. 23. Anm. 3.) ähnlich ist. Nemlich weil Lg. sin. 71°33' = 9,9770832
Lg. sin. ACB = 9,9770634
Lg. sin. 71°32' = 9,9770410

und also der Ueberschuß des Lg. sin. 71°33' über Lg. sin. 71°32' = 0,0000422
und der Ueberschuß des Lg. sin. ACB über Lg. sin. 71°32' = 0,0000224

und weil wiederum die Unterschiede der Logarithmen der Sinus, zwar nicht nach aller Schärfe, doch sehr nahe, den Unterschieden der Winkel proportional sind, wenn diese Unterschiede klein sind: so schließt man

$\frac{422}{10000000} : \frac{224}{10000000}$ oder $422 : 224$ } = 1' oder 60" : Ueberschuß des Winkels ACB über 71°32' in Sekunden ausgedrükt.

60

422) 13440 | dieser Ueberschuß ist also 31",8+
1266
780
422
3580 | und der Winkel ACB = 71°32'31",8 beynahe.

Zur Abkürzung dieser Berechnung hat man den grössern trigonometrischen Tafeln die Differenzen der Lg. sin. für 1 Sekunde beygefügt. So ist z. B. in dem vorliegenden Fall die Differenz für 1 Min. oder für 60 Sekunden = 422 Zehenmilliontheilchen, folglich für 1 Sek. = $\frac{422}{60}$ = 7,0333.... oder wenn man nur zwey Decimalstellen beybehält, 7,03. Diese Differenz steht neben den Lg. sin. in der Diff. 1" überschriebenen Columne zwischen Lg. sin. 71°32' und Lg. sin. 71°33'. Man findet also die dem Winkel 71°32' noch hinzuzufügenden Sekunden, wenn man untersucht, wie vielmal die Diff. 1" in dem Ueberschuß des gegebenen Lg. sin. über den nächst kleineren in den Tafeln enthalten ist, das ist, wenn man jenen Ueberschuß mit der Diff. 1" dividirt. Die Anzahl der zu 71°32' hinzuzufügenden Sekunden ist also = $\frac{224}{7,083} = \frac{22400}{708,3} = 31,8+$ Gehen die Tafeln von 10 zu 10 Sekunden, so findet man aus der den Lg. sin. beygefügten und Diff. überschriebenen Columne die Differenz für 1 Sek., wenn man erstere mit 10 dividirt, oder eine Ziffer von hinten abschneidet. Man würde also obigen Winkel durch solche Tafeln auf folgende Art berechnen:

Lg. sin. ACB = 9,9770634
Lg. sin. 71°32'30" = 9,9770621
Ueberschuß d. Lg. sin. ACB über Lg. sin. 71°32'30" = 13
Unterschied für 10 Sek. = 71
folglich für 1 Sek. = 7,1

$\frac{13}{7,1} = \frac{130}{71} =$ 1,8
ACB = 71°32'31",8

3.) Umgekehrt findet man Lg. sin. B d. h. von 29°42'28",2 auf folgende Art. Weil Lg. sin. 29°43' = 9,6952288
Lg. sin. 29 42 = 9,6950074

und folglich der Ueberschuß von Lg. sin. 29°43' über Lg. sin. 29°42' = 0,0002214

so schließt man nach n° 2:

1 oder 60" : 28",2
" 10 : 4,7
" 100 : 47
= 2214 : 47

Ueberschuß des Lg. sin. B über Lg. sin. 29°42', ausgedrükt in Zehenmilliontheilchen.

15498
8856

100) 1040(58 dieser Ueberschuß

ist also = 0,0001041

und weil Lg. sin. 29°42' = 9,6950074

so ist Lg. sin. B oder Lg. sin. 29°42'28",2 = 9,6951115

Vermittelst der Tafeln, welche die Lg. sin. nur für einzelne Minuten, dabey aber die Differenzen für eine Sekunde enthalten, findet man den Lg. sin. 29°42'28",2 auf folgende Art. Lg. sin. 29°42' = 9,6950074

Diff. 1" = 36,90, folglich für
28",2 .... 28,2 × 36,9
d. i. 1040,58 oder 1041

daher Lg. sin. 29°42'28",2 = 9,6951115

Gehen die Tafeln von 10 zu 10 Sekunden, so hat man
Lg. sin. 29°42'20" = 9,6950813

Diff. für 10" = 369
folglich für 1" = 36,9
und für 8",2 = 8,2 × 36,9
= 302,58 oder 303

mithin Lg. sin. 29°42'28",2 = 9,6951116

4.) In dem zweyten Beyspiel muß wiederum, weil BAC stumpf ist, der Winkel ACB spiz seyn.

Nachdem der Winkel B gefunden war, ist die Seite AC durch die Proportion bestimmt worden
sin. ACB : sin. B = AB : AC;

anstatt daß bey der Berechnung des ersten Beyspiels die Proportion gebraucht worden ist

$$\sin. A : \sin. B = BC : AC.$$

Beyde müssen einerley Resultat geben, wenn man richtig gerechnet hat.

5.) Wenn der Winkel CAB (*Fig.* 13. §. 26.) ein rechter ist, so würde man die Formel $AC = \sqrt{BC^q - AB^q}$ nicht bequem mit Logarithmen berechnen können. Aus den Logarithmen von BC und AB hätte man zwar leicht durch die Multiplication mit 2 die Logarithmen von BC^q und AB^q. Aber man müßte jezt die ihnen entsprechenden Zahlen aufsuchen, sie von einander abziehen, und den Logarithmen ihres Unterschieds mit 2 dividiren, um den Logarithmen von AC zu bekommen. (Es wird nicht überflüssig seyn, hier Anfänger zu erinnern, daß sie sich hüten, von dem Logarithmen des Quadrats von BC den Logarithmen des Quadrats von AB abzuziehen um den Logarithmen des Unterschieds beyder Quadrate zu bekommen; welches Verfahren den Logarithmen des Quotienten $\frac{BC^q}{AB^q}$ geben würde.) Man verwandelt daher vermittelst El. II, 5. den Unterschied der zwey Quadrate in ein gleich groses Rechtek, oder, wenn von Zahlen die Rede ist, in ein gleich groses Produkt zweyer Zahlen, welche die Summe und der Unterschied der beyden Wurzeln sind. Verlangt man zum Beyspiel den Unterschied der Quadrate von 150 und 100, so hat man $150^2 - 100^2 = (150+100)(150-100) = 250 \times 50 = 12500$: welche Verwandlung nicht allein die Berechnung mit Logarithmen gestattet; sondern auch bey der Berechnung in den Zahlen selbst die Rechnung abkürzt.

§. 29.

Wir wollen jezt den Fall vornehmen, wo die drey Seiten des Dreyeks gegeben sind. Sind diese erstlich einander gleich, oder ist das Dreyek gleichseitig (*Fig.* 15.):

so ist jeder Winkel desselben $\frac{2}{3}$ eines rechten $= 60°$ (El. I, 5 Schol.); die Höhe und der Flächeninhalt aber werden ebenso, wie §. 22. gefunden.

§. 30.

Wenn zweytens des Dreyeks (*Fig.* 14.) zwey Seiten AC, BC einander gleich sind, oder das Dreyek gleichschenklicht ist: folglich die Winkel A und B an der Grundlinie einander gleich sind (El. I, 5.); und das Perpendikel CD sowohl den Winkel an der Spize ACB, als die Grundlinie AB halbirt (I, 26.): so sind

$$CD^q = \begin{bmatrix} AC^q - AD^q & \text{El. I, 47.} \\ (AC+AD)(AC-AD) & \text{II, 5.} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} AC^q - \frac{1}{4}AB^q \\ (AC+\frac{1}{2}AB)(AC-\frac{1}{2}AB) \end{bmatrix}$$

woraus sich die Höhe und der Inhalt des Dreyeks ergeben:

und $AC : \begin{bmatrix} AD \\ \frac{1}{2}AB \end{bmatrix} = \text{sin. tot.} : \text{sin.} \frac{1}{2}ACB;$

wodurch, da der Winkel $\frac{1}{2}ACB$ nothwendig spiz ist, dieser Winkel, folglich auch das Doppelte desselben, oder der Winkel an der Spize ACB selbst gefunden wird. Zieht man diesen von zwey rechten ab; so bleibt die Summe der Winkel an der Grundlinie übrig: und die Hälfte dieser Summe gibt jeden dieser zwey Winkel.

§. 31.

Ebendiese Winkel werden kürzer gefunden, wenn man den Winkel $\frac{1}{2}ACB$ von einem rechten oder von $90°$ abzieht. Denn wegen der rechten Winkel bey D, macht jeder der beyden Winkel A, B mit dem Winkel $\frac{1}{2}ACB$ einen rechten (El. I, 32.); daher heißt von den Winkeln A oder B und $\frac{1}{2}ACB$ der eine das Complement des andern. Ebendaher heißt auch der Sinus des Winkels $\frac{1}{2}ACB$ der Sinus des Complements des Winkels A oder B: welches man abgekürzt schreibt $\text{sin.} \frac{1}{2}ACB = \text{Co. sin. A}$ oder $B = \text{Cosin. A}$ oder B; und liest: der Sinus des Winkels $\frac{1}{2}ACB$ ist

der Cosinus des Winkels A oder B. Umgekehrt ist sin. A oder sin. B = Co. sin. $\frac{1}{2}$ ACB = Cosin. $\frac{1}{2}$ ACB. Der Ausdruk Cosinus eines Winkels oder Bogens bezeichnet also den Sinus der Ergänzung dieses Winkels oder Bogens zu einem rechten Winkel oder zu 90°. Folglich wird der Cosinus eines gegebenen spizen Winkels gefunden: wenn man das Maß des Winkels von 90° abzieht, und den Sinus des Ueberrests aufsucht. Wenn umgekehrt der Cosinus eines spizen Winkels gegeben ist, so findet man den Winkel: wenn man in den Tafeln den Winkel aufsucht, dessen Sinus dem gegebenen Cosinus gleich ist, und diesen Winkel von 90° abzieht. Uebrigens sind die Sinustafeln so angeordnet, daß man der Mühe dieser Subtractionen von 90° überhoben ist.

Diß vorausgesezt, ist auch (§. 30.)

$$\left.\begin{matrix}AC\\BC\end{matrix}\right\} : \tfrac{1}{2}AB = \text{sin. tot.} : \left\{\begin{matrix}\text{Cosin. A}\\\text{Cosin. B.}\end{matrix}\right.$$

Ebenso hat man §. 19. *Fig.* 13.

Cosin. B : sin. tot. = AB : BC

Cosin. B : sin. B = AB : AC = $\frac{1}{2}AB^q : \frac{1}{2}AB \times AC$ oder Inhalt des Δ.

§. 32.

1. Beyspiel. *Fig.* 14.

Es seyen $\left.\begin{matrix}AC\\BC\end{matrix}\right\} = 333$ Fuß.

AB = 250

daher $\frac{1}{2}AB = 125$

$AC + \frac{1}{2}AB = 458$

$AC - \frac{1}{2}AB = 208$

$\text{Lg.}(AC + \frac{1}{2}AB) = 2{,}6608655$

$\text{Lg.}(AC - \frac{1}{2}AB) = 2{,}3180633$

$\text{Lg. CD}^q = 4{,}9789288$

$\text{Lg. CD} = 2{,}4894644$ CD = 308,6581 Fuß.

$\text{Lg.} \frac{1}{2}AB = 2{,}0969100$

$\text{Lg. AC} = 2{,}5224442$

$\text{Lg. } \Delta ABC = 4{,}5863744$ ΔABC = 3858,108Q. Fuß.

Lg. sin. A od. B } = 9,9670202 Winkel {A / B} = 67° 57' 9"
Lg. Cos. ½ ACB }
u. Lg. sin. ½ ACB } = 9,5744658 ½ ACB = 22 2 51
Lg. Cos. A od. B } ACB = 44 5 42
A + B = 135 54 18
180 0 0

2. Beyspiel.

{AC / BC} = 127 Fuß.
AB = 185
½ AB = 92,5
AC + ½ AB = 219,5
AC - ½ B = 34,5
Lg. (AC + ½ AB) = 2,3414345
Lg. (AC - ½ AB) = 1,5378191
Lg. CD² = 3,8792536
Lg. CD = 1,9396268 CD = 87,0215 Fuß.
Lg. ½ AB = 1,9661417
Lg. AC = 2,1038037
Lg. ΔABC = 3,9057685 ΔABC = 8049,492 Q. F.
Log. sin. A od. B } = 9,8358231 Winkel {A / B} = 43° 15' 7",4
Lg. Cos. ½ ACB }
Lg. sin. ½ ACB } = 9,8623380 ½ ACB = 46 44 52,6+
Lg. Cos. A od. B } 90 0 0
ACB = 93 29 45,2+
A + B = 86 30 14,8-
180 0 0

Anmerkungen zu diesen Beyspielen.

1.) Da AC : CD = sin. tot. : {sin. A oder B / Cos. ½ ACB}

so hat man sin. A oder B } = CD/AC sin. tot.
Cosin. ½ ACB }

folglich Lg. sin. A od. B } = {Lg. CD + Lg. sin. tot. - Lg. AC
Lg. Cosin. ½ ACB } {Lg. CD + 10 - Lg. AC

Man darf also nur, wenn man den Lg. sin. A oder B finden will, zu der Kennziffer des Log. von CD in Gedanken die Zahl 10 = Lg. sin. tot. addiren. Ebenso in andern ähnlichen Fällen.

2.) Die Bestimmung eines Winkels, der einem gegebenen Lg. Cosin. entspricht, betreffend ist zu bemerken: daß, wenn man aus den Tafeln den Winkel nimmt, welcher dem nächst kleineren Lg. Cosin. zugehört, die nach §. 28. Anmerk. 2. gefundene Anzahl von Secunden von diesem Winkel abgezogen werden muß, um den gesuchten Winkel zu erhalten; weil der Winkel abnimmt, indem sein Cosinus (der Sinus seiner Ergänzung zu einem rechten, also diese Ergänzung selbst) wächst, und umgekehrt. Vgl. §. 43.

§. 33.

Die Bemerkung §. 31. verbunden mit §. 26. giebt zur Bestimmung der spizen Winkel des bey A rechtwinklichten Dreyeks ABC (*Fig.* 13.), dessen Hypotenuse BC und der eine Cathetus AB gegeben sind, die Proportion:

$$BC : AB = \text{sin. tot.} : \begin{cases} \text{sin. ACB} \\ \text{Cosin. ABC} \end{cases}$$

Wenn nun BC und AB nur wenig von einander verschieden sind; so wird sin. ACB oder Cosin. ABC wenig von sin. tot. verschieden seyn. In diesem Fall wird man, da die Sinus der einem rechten sehr nahen kommenden Winkel, oder die Cosinus sehr spizer Winkel, (wie sowohl die Betrachtung der Figur als auch die Ansicht der Tafeln lehrt) sich nur langsam ändern, die gesuchten Winkel auf diesem Weg nicht sehr genau bekommen. Hingegen wird nun $AC = \sqrt{(BC+AB)(BC-AB)}$ (§. 26.) in Vergleichung mit BC sehr klein; daher die Proportion

$$BC : \left\{ \frac{AC}{\sqrt{(BC+AB)(BC-AB)}} \right\} = \text{sin. tot.} : \begin{matrix} \text{sin. ABC} \\ \text{oder Cosin. ACB} \end{matrix}$$

zu genauer Bestimmung dieser Winkel tauglicher seyn.

Den zwischen den gegebenen Seiten BC, AB einge-

schlossenen Winkel ABC besonders betreffend, läßt sich seine Berechnung auch folgendermassen auf den Fall §. 30. zurükführen, und dadurch um etwas abkürzen. Man verlängere den gegebenen Cathetus AB nach D, bis BD = der Hypotenuse BC; ziehe CD; mache also den gesuchten Winkel ABC zum Winkel an der Spize des gleichschenklichten Dreyeks BCD; und fälle in diesem, wie §. 30., das Loth BE aus der Spize B auf die Grundlinie CD: so daß

$$BD : DE = \text{sin.tot.} : \text{sin.}\tfrac{1}{2}ABC \quad (\S.\ 30.)$$

In den bey E und A rechtwinklichten Dreyeken BED, CAD, welche den Winkel D gemein haben; ist aber BD : DE = CD : AD (VI, 4.) = DE : $\frac{1}{2}$AD (V, 15.) Daher (VI, 20. Zus.)

$$\left.\begin{array}{l} BD : \tfrac{1}{2}AD \\ \text{d.h.(constr.)} BC : \frac{BC-AB}{2} \end{array}\right\} = BD^q : DE^q = \text{sin.tot.}^2 : \text{sin.}\tfrac{1}{2}ABC^2$$

$$\text{sin.}\tfrac{1}{2}ABC^2 = \frac{BC-AB}{2BC}\,\text{sin. tot.}^2$$

$$\text{und sin.}\tfrac{1}{2}ABC = \text{sin. tot.}\sqrt{\frac{BC-AB}{2BC}}$$

Beyspiel.

Es sey BC = 23415$\frac{1}{2}$ Fuß = 23415,5 Fuß.
AB = 23415
folgl. BC + AB = 46830$\frac{1}{2}$
BC − AB = 0,5
2BC = 46831

Lg. sin. tot. =	10,	
Lg. AB =	4,3694942	
Lg. BC =	4,3695035	
Lg. Cosin. B =	9,9999907	hienach ABC = 0° 22′ 30″,0
Lg. (BC + AB) =	4,6705288	
Lg. (BC − AB) =	9,6989700-10	
	4,3694988	
Lg. $\sqrt{(BC+AB)(BC-AB)}$ =	2,1847494	
Lg. sin. tot. =	10,	
Lg. BC =	4,3695034	
Lg. sin. ABC =	7,8152460	Daher ABC = 0° 22′ 27″,95

$\overline{\text{Lg. sin. tot.}}^2 = 20,$
Lg. (BC - AB) = 0,6989700-1
Lg. 2BC = 4,6705334
$\overline{\text{Lg. sin. } \frac{1}{2}\text{ABC}}^2 = 15,0284366$
Lg. sin. $\frac{1}{2}$ABC = 7,5142183 $\frac{1}{2}$ABC = 0° 11' 13",98
ABC = 0 22 27, 96

Hier wäre also der Fehler der ersten Berechnung etwas über 2 Sekunden: welcher daher rührt, daß, wenn der Winkel 0°22' um 1 Min. wächst, der Logarithme seines Cosinus nur um 8 Zehenmilliontheilchen abnimmt; folglich, wenn die lezte Ziffer seines Logarithmen nur um $\frac{1}{4}$ einer Einheit zu klein ist, der Winkel doch beynahe um 2 Sekunden zu gros wird.

§. 34.

Wenn drittens die drey gegebenen Seiten des Dreyeks ungleich sind, oder das Dreyek ungleichseitig ist: so bieten zuerst die Säze I, 47. II, 12. 13. der Elemente und ihre converse folgende Methode an, die Höhe, den Inhalt und die Winkel des Dreyeks zu berechnen.

Durch Vergleichung des Quadrats der gröften Seite mit der Summe der Quadrate der übrigen zwey Seiten untersuche man: von welcher Art das Dreyek in Ansehung seiner Winkel sey.

Wenn nemlich das Quadrat der gröften Seite gleich ist der Summe der Quadrate der übrigen zwey Seiten; d. h. wenn $BC^q = AB^q + AC^q$; (*Fig.* 19.) und daher (El. I, 48.) das Dreyek bey A rechtwinklicht ist: so sind der Inhalt des Dreyeks $= \frac{1}{2}AB \times AC$;

und $BC : \left\{\begin{matrix}AB\\AC\end{matrix}\right\} = \text{sin. tot.} : \left\{\begin{matrix}\text{sin. ACB oder Cosin. ABC}\\\text{sin. ABC oder Cosin. ACB}\end{matrix}\right.$

1.) Beyspiel.

$BC = 35$ Fuß. $BC^q = 1225$ Q. F. $\frac{1}{2}AB = 14$

$AB = 28$ $AB^q = 784$ $AC = 21$

$AC = 21$ $AC^q = 441$ 14

$AB^q + AC^q = 1225$ 28

$\Delta ABC = 294$ Q. F.

sin. ACB oder Cosin. $ABC = \frac{28}{35}$ sin. tot. $= \frac{4}{5}$ sin. tot. $= 8000000$

sin. ABC oder Cosin. $ACB = \frac{21}{35}$ sin. tot. $= \frac{3}{5}$ sin. tot. $= 6000000$

daher $ACB = 53° 8'$ -

$ABC = 36\ 52$ +

$90\ 0$

2.) Beyspiel.

$BC = 187$ Fuß. $BC^q = 34969$ Q. F. $AB = 165$ F.

$AB = 165$ $AB^q = 27225$ $\frac{1}{2}AC = 44$

$AC = 88$ $AC^q = 7744$ 660

$AB^q + AC^q = 34969$ 660

$\Delta ABC = 7260$ Q. F.

Lg. AB sin. tot. $= 12,2174839$

Lg. AC sin. tot. $= 11,9444827$

Lg. $BC = 2,2718416$

Lg. sin. $ACB = 9,9456423$ $ACB = 61° 55' 39''$ -

Lg. sin. $ABC = 9,6726411$ $ABC = 28\ 4\ 21$ -

$ABC + ACB = 90\ 0\ 0$

§. 35.

Wenn das Quadrat der grösten Seite grösser ist als die Summe der Quadrate der beyden übrigen Seiten; d. i. wenn $BC^q > AB^q + AC^q$ (*Fig.* 12.); folglich das Dreyek ABC bey A stumpfwinklicht ist: so ist

$$2AB \times AD = BC^q - (AB^q + AC^q) \quad \text{Elem. II, 12}$$

und $$AD = \frac{BC^q - (AB^q + AC^q)}{2AB}$$

Alsdenn ferner $CD^q = AC^q - AD^q$ (I, 47.)
$= (AC+AD)(AC-AD)$ (II, 5 Sch. 1.)

$AC : AD = \text{sin. tot.} : \text{sin. } ACD$

$BC : \left\{\begin{matrix} BD \\ AB+AD \end{matrix}\right\} = \text{sin. tot.} ; \text{sin. } BCD$ oder Cosin. B.

Und nun der Winkel $CAB = D$ oder $90^\circ + ACD$ (I, 32.)
und der Winkel $ACB = BCD - ACD$

1.) Beyspiel.

Es sey $BC = 130$ Fuß also $BC^q = 16900$ Q. F.

$AB = 84\frac{1}{2}$ $\quad AB^q = 7140\frac{1}{4}$
$AC = 71\frac{1}{2}$ $\quad AC^q = 5112\frac{1}{4}$
daher $AD = 27\frac{1}{2}$ $\quad AB^q + AC^q = 12252\frac{1}{2}$

$\left.\begin{matrix} AB+AD \\ \text{oder } BD \end{matrix}\right\} = 112$ $\quad 2AB \times AD = 4647\frac{1}{2}$ Q. F.

$AC+AD = 99$
$AC-AD = 44$
396
396
$CD^q = 4356$ Q. Fuß.

$2AB = 169)338$
1267
1183
$84\frac{1}{2}$
od. $\frac{169}{2}$

$AD = 27\frac{1}{2}$
$AD^q = 756\frac{1}{4}$ Q. F.
$AC^q = 5112\frac{1}{4}$

$\left.\begin{matrix} AC^q - AD^q \\ \text{oder } CD^q \end{matrix}\right\} = 4356$ Q. F.

$CD = 66$ Fuß.
$\frac{1}{2}AB = 42\frac{1}{4}$
$16\frac{1}{2}$
132
264
$\Delta ABC = 2788\frac{1}{2}$ Q. F.

$\left.\begin{matrix} AC : AD \\ \text{d. i. } 71\frac{1}{2} : 27\frac{1}{2} \\ \text{od. } 143 : 55 \\ \text{od. } 13 : 5 \end{matrix}\right\} = 10\,000\,000 : \text{sin. } ACD$

$\left.\begin{matrix} \text{und } BC : BD \\ 130 : 112 \end{matrix}\right\} = 10\,000\,000 : \left\{\begin{matrix} \text{sin. } BCD \\ \text{Cos. } B. \end{matrix}\right.$

folglich sin. ACD = 3846154 — Also ACD = 22° 37' 11,5
sin. BCD } = 8615385 — BCD = 59 29 23,1
od. Cos. B } — BAC = 112 37 11,5
ACB = 36 54 11,6
B = 30 30 36,9
180 0 0

2. Beyspiel.

BC = 25 Ruthen — $BC^2 = 625$ Q. Ruthen
AB = 17 — $AB^2 = 289$
AC = 15 — $BC^2 = 169$
458
$2AB \times AD = 167$
$AD = \frac{167}{34}$ Ruthen — Lg. 167 = 2,2227165
$c = 4\frac{3}{34}$ — Lg. 745 = 2,8721563
$BD = 21\frac{31}{34} = \frac{745}{34}$ — Lg. 34 = 1,5314789
$AC + AD = 17\frac{31}{34} = \frac{609}{34}$ — Lg. AD = 0,6912326
$AC - AD = 8\frac{3}{34} = \frac{275}{34}$ — Lg. AC = 1,1394434
Lg. BD = 1,3406774
Lg. BC = 1,3979400
Lg. sin. ACD = 9,5772942 — ACD = 22° 11' 57"
Lg. sin. BCD } = 9,9427374 — BCD = 61 13 10
Lg. Cosin. B } — B = 28 46 50
BCA = 39 1 13
BAC = 112 11 57

Lg. 609 = 2,7846173
Lg. 275 = 2,4393327
Lg. 34 = 1,5314789
Lg. (AC + AD) = 1,2531384
Lg. (AC − AD) = 0,9078538
Lg. CD^2 = 2,1609922
Lg. CD = 1,0804961
Lg. $\frac{1}{2}$AB = 0,9294189
Lg. ΔABC = 2,0099150 — ΔABC = 102,3093 Q. Ruth.

Anmerkungen über die Berechnung der vorhergehenden Beyspiele.

1.) Um aus sin. ACD = 3846154 den Werth des Winkels ACD genauer als nur in Minuten zu schliessen; verfährt man ebenso, als wenn man den Log. Sinus eines Winkels kennt (S. 2 Anmerk. §. 28.): weil die Unterschiede der Sinus zwar nicht nach aller Schärfe, aber doch sehr nahe, den Unterschieden der Winkel proportional sind, wenn diese Unterschiede sehr klein sind.

Weil nun

sin. 22°38′ = 3848839
sin. ACD = 3846154
sin. 22°37′ = 3845639

also der Ueberschuß d. sin. 22°38′ üb. sin. 22°37′ = 2685
und der Ueberschuß d. sin. ACD üb. sin. 22 37 = 515

so schließt man

2685 : 515 } = 1 od. 60″ Ueberschuß des Winkels ACD
oder 537 : 193 } über 22°37′ in Sekunden ausgedrükt.

60

537) 6180 | dieser Ueberschuß ist also = 11″,5
537 |
816 | und der Winkel ACD = 22°37′11″,5
537 |
2730
2685
45

2.) Ebenso verfährt man mit Cosin. B = 8615385, nur muß man bemerken, daß der Winkel wächst, so wie der Cosinus abnimmt; und umgekehrt (§. 32. Anm. 2. und §. 43.)

Also

Cosin. 30°30′ = 8616292
Cosin. B = 8615385
Cosin. 30°31′ = 8614815

folgl. der Unterschied des Cos. 30°31′ u. Cos. 30°30′ = 1477
u. der Unterschied des Cos. B und Cos. 30°30′ = 907

Daher 1477 : 907 = 1′ od. 60″: Ueberſch. des Wink. B über 30°30′ in Sek. ausgedrükt.

60

1477) 54420 | dieſer Ueberſchuß iſt alſo = 36″,8 +
4431 |
10110 | und der Winkel B = 30°30′36″,8
8862 |
12480 |
11816 |
664

§. 361.

Wenn das Quadrat der gröſten Seite kleiner iſt als die Summe der Quadrate der zwey andern Seiten; d. i. wenn $BC^q < AB^q + AC^q$ (*Fig.* 11.); und folglich das Dreyek ſpizwinklicht iſt: ſo ſind

$AB \times AD = AB^q + AC^q - BC^q$ (II, 13.), und

$$AD = \frac{AB^q + AC^q - BC^q}{2AB}$$

Alsdenn wiederum

$$CD^q = AC^q - AD^q = (AC + AD)(AC - AD)$$

$AC : AD =$ sin. tot. : sin. ACD oder Cosin. A

$BC : \left\{\begin{matrix} BD \\ AB - AD \end{matrix}\right\} =$ sin. tot. : sin. BCD oder Cosin. B

endlich der Winkel ACB = ACD + BCD

1.) Beyspiel.

$BC = 60$ Fuß. $BC^q = 3600$ Q. Fuß.

$AB = 55$ $AB^q = 3025$

$AC = 32$ $AC^q = 1024$

4049

$2 . AB \times AD = 449$

$AD = \frac{449}{110}$

$= 4\frac{9}{110}$

$AC + AD = 36\frac{9}{110} = \frac{3969}{110}$

$AC - AD = 27\frac{101}{110} = \frac{3071}{110}$

$BD = 50\frac{101}{110} = \frac{5601}{110}$

Lg. 3071 = 3,4872798

Lg. 3969 = 3,5986811

Lg. 110 = 2,0413927

Lg. (AC-AD) = 1,4458871

Lg. (AC+AD) = 1,5572884

Lg. CD^q = 3,0031755

Lg. CD = 1,5015877

Lg. AB = 1,7403827

3,24195045

0,3010300

Lg. ΔABC = 2,94092045

ΔABC = 872,8115 Q. F.

Lg. 449 = 2,6522463

Lg. 5601 = 3,7482656

Lg. 110 = 2,0413927

Lg. AD sin. tot. = 10,6108536

Lg. AC = 1,5051500

Lg. BD sin. tot. = 11,7068729

Lg. BC = 1,7781513

Lg. sin. ACD, Lg. Cosin. A = 9,1057036

Lg. sin. BCD, Lg. Cosin. B = 9,9287216

A =	82°	40'	17",6 +
ACD =	7	19	42,4 -
BCD =	58	3	49,2 -
B =	31	56	10,8
ACB =	65	23	31,6
A =	82	40	17,6
	180	0	0

2.) Beyſpiel. Es ſeyen

$BC = 61\frac{4}{9}$ Ruthen daher $BC^q = 3775\frac{34}{81} \mid \frac{2176}{5184}$ Q. Ruth.

$AB = 55\frac{5}{8}$ $AB^q = 3094\frac{9}{64}$

$AC = 33\frac{3}{4}$ $AC^q = 1130\frac{1}{16} \mid \frac{4}{64}$

$AB^q + AC^q = 4233\frac{13}{64} \mid \frac{1053}{5184}$

$2AB = 111\frac{1}{4}$ $2.AB \times AD = 457\frac{4061}{5184}$

445

$12\frac{4061}{5184}$

$AD = 4\frac{662069}{5767720}$ Ruthen.

oder $\frac{662069}{5184}$

$AB = 55\frac{5}{8} \mid \frac{3604550}{5767720}$

$AC = 33\frac{3}{4} \mid \frac{4325460}{5767720}$

$AD = 4 \mid \frac{662069}{5767720} = \frac{2731140}{5767720}$ R.

$AB - AD$ oder $BD = 51 \quad \frac{2941810}{5767720} = \frac{29706901}{5767720}$

$AC + AD = 37 \quad \frac{2938069}{5767720} = \frac{21837449}{5767720}$

$AC - AD = 29 \quad \frac{3662711}{5767720} = \frac{17091158}{5767720}$

Lg. 2373149 = 6,3753250

Lg. 29706901 = 7,4728573

Lg. 5767720 = 5,7609650

also Lg. AD sin. tot. = 10,6143600

Lg. BD sin. tot. = 11,7118923

Lg. AC od. Lg. 33,75 = 1,5282738

Lg. BC od. Lg. $\frac{553}{9}$ = 1,7884826

Lg. sin. ACD od. Lg. Cosin. A = 9,0860862

Lg. sin. BCD od. Lg. Cosin. B = 9,9234097

ACD = 7° 0 11,2

BCD = 56 57 47,2

ACB = 63 57 58,4

A = 82 59 48,8

B = 33 2 12,8

180 0 0

Lg. 21837449 = 7,3392019
Lg. 17091151 = 7,2327713
Lg. 576720 = 5,7609650
also Lg. (AC + AD) = 1,5782369
Lg. (AC − AD) = 1,4718063
Lg. CD² = 3,0500432
Lg. CD = 1,5250216
Lg. 445 = 2,6483600 weil ½AB = 44⅝ Ruth.
4,1733816
Lg. 16 = 1,2041200
Lg. ΔABC = 2,9692616 ΔABC = 931,669 □.R.

Anmerkungen über die Berechnung des 2) vorhergehenden Beyspiels.

1.) Den Lg. 576720, welcher sich nicht in den kleinen gemeinen Tafeln findet, schließt man daraus auf folgende Art:

Lg. 5768 = 3,7616253 folgl. Lg. 576800 = 5,7610253
Lg. 5767 = 3,7609500 Lg. 576700 = 5,7609500
und der Ueberschuß des Lg. 576800 über den Lg. 576700 } = 0,0000753

Hieraus schließt man nach Anmerk. 3. §. 23.

100 : 20 = 753 : Ueberschuß des Lg. 576720 über Lg. 576700 in Zehenmilliontheilchen ausgedrükt.
20

1(00)150(60 folglich ist dieser Ueberschuß = 0,0000150
und daher Lg. 576720 = 5,7609650

Ebenso findet man Lg. 2373149.

Neml. Lg. 2374 = 3,3754807 also Lg. 2374000 = 6,3754807
Lg. 2373 = 3,3752977 Lg. 2373000 = 6,3752977
u. d. Ueberſch. Lg. 2374000 üb. Lg. 2373000 = 0,0001830

daher 1000 : 149 = 1830 : Ueberſch. d. Lg. 2373149 über Lg. 2373000 in Zehenmilliontheilchen ausgedrükt.

149

10470

732

183

1(000)272(670

flgl. iſt dieſer Ueberſ. = 0,0000273

und Lg. 2373149 = 6,3753250

In den größeren Tafeln, welche ſich bis auf die Zahl 100000 erſtreken, findet man Lg. 57672 = 4,7609650

folglich Lg. 576720 = 5,7609650

Den Lg. 2373149 findet man vermittelſt der Tafeln der Proportionaltheile (Anmerk. 3. zu §. 23.) auf folgende Art.

Lg. 23731 = 4,3753160

Prop. Theile für $\frac{4}{10}$ od. 0,4 = 73

Prop. Theile für $\frac{9}{10}$ = 165

folglich für $\frac{9}{100}$ oder für 0,09 = 16,5

mithin iſt Lg. 23731,49 = 4,3753249,5

oder = 4,3753250

alſo Lg. 2373149 = 6,3753250

Ebenſo für Lg. 21837449.

Lg. 2184 = 3,3392526 alſo Lg. 21840000 = 7,3392526

Lg. 2183 = 3,3390537 Lg. 21830000 = 7,3390537

und Ueberſchuß des Lg. 21840000 über Lg. 21830000 = 0,0001989

folglich 10000 : 7449 = 1989 : Ueberſchuß des Lg. 21837449 über Lg. 21830000 ausgedr. in Zehenmilliontheilchen.

daher iſt dieſer Ueberſchuß = 0,0001482

und Lg. 21837449 = 7,3392019

Vermittelſt der Tafeln der Proportionaltheile findet man dieſen Logarithmen auf folgende Art:

Lg. 21837	=	4,3391930
Prop. Theile für 0,4	=	80
— — — 0,04	=	8
— — — 0,009	=	1.79
Lg. 2837,449	=	4,3392019.79
oder	=	4,3392020
mithin Lg. 21837449	=	7,3392020

2.) Um die Winkel A und B unmittelbar aus den Lg. Cos. A und Lg. Cos. B genauer herzuleiten, als nur in Minuten, so verfährt man wie Anmerk. 4 §. 28. indem man immer beobachtet, was Anmerk. 2. §. 32. gesagt worden ist.

Also Lg. Cosin. 82°59′	=	9,0860221
Lg. Cosin. A	=	9,0860862
Lg. Cosin. 82°60′	=	9,0858945
folglich Unterschied des Lg. Cosin. 82°60′ von Lg. Cosin. 82 59	=	0,0010276
u. Unterschied d. Lg. Cos. A v. Lg. Cos. 82°59′	=	0,0008359

daher 10276 : 8359 = 1′ od. 60″ : Ueberschuß des Winkels A über 82°59′ in Sek.

folglich ist dieser Ueberschuß = 48,8″

und der Winkel A = 82°59′48″,8

§. 37.

Wenn man den Winkel ACD (*Fig.* 11, 12.) durch die Proportion AC : AD = sin. tot. : sin. ACD bestimmt; und dadurch den Winkel BAC = 90° ± ACD (§. 35. 36.) gefunden hat: so lassen sich die übrigen zwey Winkel des Dreyeks auch mittelst der Proportionen

$$BC : \begin{Bmatrix} AC \\ AB \end{Bmatrix} = \text{sin. A} : \begin{Bmatrix} \text{sin. B} \\ \text{sin. ACB} \end{Bmatrix}$$

berechnen.

Die Methode §. 35. und 36. ist aber sowohl bequemer als genauer. Die Bestimmung der Winkel B und ACB durch die eben angezeigten Proportionen hängt nämlich von dem Winkel BAC ab, dessen Größe man selten nach aller

Schärfe genau erhält; und zwar von seinem Sinus, den man erst aus den Tafeln nehmen muß.

Ueberhaupt ist es zuträglich, jede gesuchte Größe, so viel möglich, unmittelbar aus den gegebenen Bestimmungsstüken, oder wenigstens aus den ersten und einfachsten daraus gefolgerten Stüken herzuleiten: so wohl um die Rechnung leichter und kürzer zu machen, und sie nicht ohne Noth dem Einfluß des Mangels einer strengen Genauigkeit in den vorhergehenden Folgerungen auszusezen; als auch um jede unbekannte Größe besonders und unabhängig von den übrigen bestimmen zu können, wenn man etwa eine derselben allein verlangt; und nicht nöthig zu haben, vorher erst andere zu berechnen, die man vor jezt nicht zu kennen verlangt.

Fig. 11. 12. Aus eben diesen Gründen enthält man sich §§. 35. 36. der Proportionen

$$\left.\begin{matrix} AC \\ BC \end{matrix}\right\} : CD = \text{sin. tot.} : \left\{\begin{matrix} \text{sin. } A \\ \text{sin. } B \end{matrix}\right.$$

wenn die Höhe CD des Dreyeks auf die daselbst angezeigte Art bestimmt wird, und wie gemeiniglich, mit den Seiten des Dreyeks incommensurabel ist; besonders wenn man die Winkel allein, und nicht auch den Inhalt des Dreyeks zu wissen verlangt.

§. 38.

Uebrigens kann man, von welcher Art das ungleichseitige Dreyek, dessen Seiten gegeben sind, in Ansehung seiner Winkel seyn mag, diese immer nach der §. 36 gelehrten Art berechnen, wenn man das Perpendikel AE (*Fig.* 16.) auf des Dreyeks gröste Seite BC als Grundlinie fällt. Denn da die an der grösten Seite BC liegenden Winkel des Dreyeks B und C nothwendig spiz sind: so fällt das Perpendikel AE immer innerhalb des Dreyeks; und man hat (II, 13.)

$$CE = \frac{BC^q + AC^q - AB^q}{2BC} \text{ und}$$

$$BE = BC - CE \text{ oder } = \frac{BC^q + AB^q - AC^q}{2BC};$$

alsdenn $AC : CE = \text{sin. tot.} : \text{sin. } CAE$ oder Cosin. C

$AB : BE = \text{sin. tot.} : \text{sin. } BAE$ oder Cosin. B:

und endlich ist der Winkel CAB, von welcher Art er auch seyn mag $= CAE + BAE$.

§. 39.

Wird aus der Spize des Winkels A, welcher der grösten Seite BC gegenüber liegt, als Mittelpunkt, und mit einem Halbmesser = der kleinsten Seite AC, ein Kreis beschrieben; welcher die Grundlinie BC in dem Punkt F so schneiden wird, daß $FE = CE$ (III, 3.), folglich BC, BE, BF stetig arithmetisch proportional sind; und verlängert man die Seite BA, bis sie den Kreis wieder in dem Punkt G schneidet: so ist $BC : \left\{\begin{matrix} BG \\ AB+AC \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} BL \\ AB-AC \end{matrix}\right\} : BF$ (El. III, 36. Schol. 1. VI, 16.) d. h. die grösste Seite des Dreyeks verhält sich zur Summe der übrigen zwey Seiten, wie ihre Differenz zu der geraden Linie BF, welche die dritte arithmetische Proportionallinie ist zu der grösten Seite oder Grundlinie BC und zu ihrem durch das Perpendikel AE abgeschnittenen grösseren Segment BE. Alsdenn ist aber

$$2BE = 2BF + \left\{\begin{matrix} 2FE \\ FC \end{matrix}\right\} = BC + BF$$

$$BE = \frac{BC + BF}{2};$$

und $CE = \frac{1}{2}CF = \frac{BC - BF}{2}$

So hat man nicht nöthig, die Seiten des Dreyeks zu quadriren, um die Segmente BE, CE der Grundlinie BC zu finden.

Anwendung dieser Methode auf die Berechnung der §. 35, 36. gegebenen Beyspiele.

1.) Beyspiel d. 35. §.

BC = 130 Fuß. daher 130 : 156 = 13 } : BF
AB = 84½ oder 10 : 156 = 1 }
AC = 71½ folglich BF = 15,6 Fuß.
AB + AC = 156 BC = 130,0
AB - AC = 13 BC + BF = 145,6
BC - BF = 114,4
BE = 72,8
CE = 57,2

d. h. AC : CE
71,5 : 57,2
715 : 572
13) 55 : 44
11) 5 : 4
1
} = 2 xø000000 : { sin. CAE / Cosin. C } = 8000000

d. h. AB : BE
84,5 : 72,8
845 : 728
13) 65 : 56
13
} = 2 xø000000 : { sin. BAE / Cosin. B } = 8615385 (wie §. 35.)

folglich sind die Winkel CAE = 53° 7' 48",4
BAE = 59 29 23,1
BAC = 112 37 11,5
C = 36 52 11,6
B = 30 30 36,9
180 ° 0

2.) Beyspiel d. 35. §.

BC = 25 Ruth. daher 25 : 30 } = 4 : BF
AB = 17 5 : 6 }
AC = 13 folglich BF = 4⅘ = 4,8 R.
AB + AC = 30 BC = 25,0
AB - AC = 4, BC + BF = 29,8
BC - BF = 20,2
BE = 14,9
CE = 10,1

Lg. BE sin. tot. = 11,1731863
Lg. AB = 1,2304489
Lg. Cosin. B } = 9,9427374 (wie §. 35.)
Lg. sin. BAE }

folglich BAE = 61° 13' 10"

Lg. CE sin. tot. = 11,0043214
Lg. AC = 1,1139434
Lg. sin. CAE } = 9,8903780
Lg. Cosin. C }

CAE = 50° 58' 47"
BAC = 112 11 57
B = 28 46 50
C = 39 1 13
180 0 0

1.) Beyspiel d. 36. §.

BC = 60 Fuß. daher 60 : 87 } = 23 : BF
AB = 55 20 : 29 }
AC = 32
AB + AC = 87
AB - AC = 23

folglich BF = $33\frac{7}{20}$ Fuß.
oder = 33,35
BC = 60,00
BC + BF = 93,35
BC - BF = 20,65
BE = 46,675
CE = 13,325

Lg. BE = 1,6690843
Lg. CE = 1,1246672
Lg. AB = 1,7403627
Lg. AC = 1,5051500

Lg. sin BAE } = 9,9287216 folglich BAE = 58° 3' 49",2
Lg. Cosin. B } (wie §. 36.)
Lg. sin. CAE } = 9,6195172
Lg. Cosin. C }

CAE = 24 36 28,4
BAC = 82 40 17,6
B = 31 56 10,8
C = 65 23 31,6
180 0 0

2.) Beyspiel v. 36. §.

BC = $61\frac{4}{5}$ R. daher $61\frac{4}{5} : 89\frac{3}{8} = 21\frac{7}{8}$: BF
AB = $55\frac{3}{8}$ $\frac{133}{9} : \frac{715}{8} = \frac{175}{8}$
AC = $33\frac{7}{24}$ $35392 : 6435 = 175$

AB + AC = $89\frac{3}{8}$
AB − AC = $21\frac{7}{8}$

Lg. 6435 = 3,8085486
Lg. 175 = 2,2430380
6,0515866
Lg. 35392 = 4,5489051
Lg. BF = 1,5026815
BF = 31,81863
BC = 61,44444
93,26307
29,62581
BE = 46,631535
CE = 14,812905

Lg. BE sin. tot. = 11,6686797
Lg. AB = 1,7452700
Lg. sin. BAE } = 9,9234097 folgl. BAE = 56° 57′ 47″,2
Lg. Cosin. B }

Lg. CE sin. tot. = 11,1706403
Lg. AC = 1,5282738
Lg. sin. CAE } = 9,6423665 folgl. CAE = 26 2 1,6
Lg. Cosin. C }

BAC = 82 59 48,8
(wie §. 36.) B = 33 2 12,8
C = 63 57 58,4
= 180 0 0

Anmerkung über die Berechnung des lezten Beyspiels.

Bequemerer Rechnung halber wurde BF durch Logarithmen gesucht, welches man mit einem angehängten Decimalbruch bekommen hat; und hierauf auch der der Zahl 61 in dem Werth von BC angehängte Bruch $\frac{4}{5}$ in den Decimal-

bruch 0,4444... verwandelt. Läßt sich ein Bruch, welches öfters und auch hier der Fall ist, nicht genau durch einen Decimalbruch ausdruken; so muß man diesen auf so viele Stellen fortsezen, bis die ganze Zahl sammt dem ihr angehängten Decimalbruch wenigstens sieben Ziffern hat. (Wollte man noch mehrere Decimalstellen nehmen, so würde dadurch die lezte Ziffer des der Zahl entsprechenden Logarithmen nicht mehr geändert werden.) Man sieht hieraus, daß diese Verwandlung der gewöhnlichen Brüche in Decimalbrüche nicht immer vortheilhaft ist. So würde man z. B. in der Proportion für BF beym Gebrauch der Decimalbrüche den Logarithmen einer aus 7 Ziffern bestehenden Zahl, (nämlich den von BC = 61,4444) haben suchen müssen, um BF so genau zu bekommen, als die Logarithmen Tafeln gestatten. Lassen sich aber die in der Rechnung vorkommenden Brüche genau, wie in dem 1 Beyspiel, in Decimalbrüche von wenigen Ziffern verwandeln; so ist ihr Gebrauch vortheilhaft.

Wenn man in dem 2 Beyspiel BF, ohne Logarithmen zu gebrauchen, berechnet, so findet man BF $= 31\frac{28973}{35392}$ R.

$$= 31\tfrac{260757}{318528} \text{ und weil } BC = 61\tfrac{4}{9} =$$

$$= 61\tfrac{141568}{318528}$$

$$BC + BF = 93\tfrac{83797}{318528}$$

$$BC - BF = 29\tfrac{199339}{318528}$$

$$BE = 46\tfrac{402325}{637056} = \tfrac{29706901}{637056}$$

$$CE = 14\tfrac{517867}{637056} = \tfrac{9436651}{637056}$$

$$AC = 33\tfrac{3}{4} = \tfrac{21500640}{637056}$$

$$AB = 55\tfrac{5}{8} = \tfrac{35436240}{637056}$$

Da aber AB : BE = sin. tot. : $\left\{\begin{matrix}\text{sin. BAE}\\ \text{Cosin. B}\end{matrix}\right.$ und die Brüche, welche AB und BE ausdrüken, gleiche Nenner haben; so verhält sich sin. tot. : $\left\{\begin{matrix}\text{sin. BAE}\\ \text{Cosin. B}\end{matrix}\right\}$ = der Zähler des Bruchs für AB zum Zähler des Bruchs für BE. Dasselbe findet statt in der Proportion für sin. CAE oder Cosin. C. Also

Lg. 29706901 = 7,4728573
Lg. 9436651 = 6,9748178
Lg. 35436240 = 7,5494476
Lg. 21500640 = 7,3324514
Lg. sin. BAE } = 9,9234097
Lg. Cosin. B } wie oben.
Lg. sin. CAE }
Lg. Cosin. C } = 9,6423664

§. 46.

Nach §. 38. werden die spizen Winkel C und B eines jeden ungleichseitigen Dreyeks ABC (*Fig.* 16.) durch folgende Proportionen bestimmt.

$$\left.\begin{array}{c} AC : CE \\ \text{oder (VI, 1.)}\ 2BC \times AC : 2BC \times CE \\ \text{oder (II, 13.)}\ 2BC \times AC : BC^q + AC^q - AB^q \end{array}\right\} = \text{sin. tot. : Cos. C}$$

$$\left.\begin{array}{c} AB : BE \\ 2BC \times AB : 2BC \times BE \\ 2BC \times AB : BC^q + AB^q - AC^q \end{array}\right\} = \text{sin. tot. : Cos. B,}$$

(*Fig.* 11.) Ebenso wird, wenn das Dreyek spizwinklicht ist, der Cosinus seines der grösten Seite BC gegenüber liegenden Winkels (§. 36.) durch die Proportion gefunden

$$\left.\begin{array}{c} AC : AD \\ 2AB \times AC : 2AB \times AD \\ 2AB \times AC : AB^q + AC^q - AB^q \end{array}\right\} = \text{sin. tot. : Cos. A}$$

In jedem ungleichseitigen Dreyek verhält sich also der Cosinus jedes spizen Winkels zum Sinus totus; wie der Ueberschuß der Summe der Quadrate der Seiten um den Winkel über das Quadrat seiner Gegenseite, zu dem doppelten Rechtek aus den Seiten um den Winkel. Und diese allgemeine Regel führt die Berechnung dieser Winkel unmittelbar auf die gegebne Bestimmungsstüke selbst, d. i. auf die Seiten des Dreyeks zurük.

§. 41.

Uebrigens zeigt die Berechnungsart, welche diese Regel vorschreibt, zugleich selbst an: ob der Winkel des Dreyeks

auf deſſen Berechnung ſie angewendet wird, wirklich ſpiz ſey, oder nicht. Er wird nemlich ſpiz ſeyn, ſo oft die Summe der Quadrate der Seiten um den Winkel größer iſt als das Quadrat der gegenüber liegenden Seite.

Iſt die Summe der Quadrate der Seiten um den Winkel dem Quadrat ſeiner Gegenſeite gleich: ſo iſt der Winkel ein rechter (El. I. 48.) folglich ſein Complement und Coſinus = 0. Ebendiß folgt für dieſen Fall aus der Regel §. 40, weil alsdenn $AB^q + AC^q - BC^q = 0$. (*Fig.* 13.)

§. 42.

Iſt aber die Summe der Quadrate der Seiten um den Winkel kleiner als das Quadrat ſeiner Gegenſeite, folglich der Winkel ſtumpf: ſo kann im eigentlichen und ſtrengen Sinn (*Fig.* 12.) BC^q nicht von $AB^q + AC^q$ abgezogen, noch dem Winkel BAC ein Complement und Coſinus zugeſchrieben werden. In dieſem Fall ſtellt man ſich die Sache auf folgende Art vor; von der man häufigen Gebrauch macht, und die ſowohl nach andern Rükſichten als in Beziehung auf uneingeſchränkte Ausdehnung gewiſſer Regeln auf alle ähnliche Fälle, dergleichen hier beabſichtiget wird, von groſſer Wichtigkeit iſt.

Wenn eine Perſon A 3500 Gulden hat, und 2400 G. ſchuldig iſt; ſo iſt ihr eigenthümliches Vermögen 3500-2400 = 1100 G. Allgemein giebt der Ueberſchuß des im Beſiz habenden über die Schulden das eigenthümliche Vermögen der Perſon A an, wenn ſie welches hat; und ſie hat wirklich welches, wenn ihr Beſizſtand die Schulden überſteigt. Wenn nun eine andere B ebenfalls 3500 G. beſizt; aber 3600 G. ſchuldig iſt: ſo fehlen dieſer zur Bezahlung der Schulden 100 Gulden; und ſie hat nicht nur kein eigenthümliches Vermögen, ſondern ſie iſt 100 G. mehr ſchuldig, als ſie beſizt; oder, wenn man alles, was ſie beſizt, zur Bezahlung der Schulden verwendet hat, ſo bleibt ihr nicht nur nichts eigenthümliches übrig, ſondern ſie iſt noch 100 G. ſchuldig. Diß wird nun durch den Ausdrük angezeigt: Das eigene Vermögen der Perſon B ſey 3500 - 3600 = - 100 G. In eben-

diesen Fällen heißt das eigenthümliche Vermögen der Person A positiv oder bejahend; das ist, in der That so beschaffen, wie es die Frage und die zu ihrer Beantwortung vorgeschriebene Regel voraussezten: das eigene Vermögen der Person B aber heißt negativ oder subtraktiv; das ist, von einer Natur und Beschaffenheit, welche der entgegengesezt ist, von welcher die Frage war. Wenn alsdenn beyde A und B 800 G. gewinnen: so wird jezt das eigenthümliche Vermögen der Person A seyn $800+1100=1900$ G.; das eigenthümliche Vermögen der Person B aber wird seyn $800-100=700$ G. Wenn man im Gegentheil fragt: wie viel jede von ihnen gewinnen müsse, damit ihr eigenes Vermögen 1500 G. ausmache? so findet man, daß A gewinnen müsse $1500-1100=400$ G; aber B $1500+100=1600$ Gulden.

So wird im allgemeinen, wenn eine Frage erfordert, daß man sie durch den Ueberschuß einer Größe C über eine andere D beantworte; und in einem besonderen Fall die Zahl, welche die Größe C ausdrükt, kleiner heraus kommt, als die, welche die Größe D angiebt, die Antwort subtraktiv oder negativ: die durch die allgemeine Regel vorgeschriebene Subtraktion kann nicht ganz vollzogen werden, sondern es bleibt noch etwas abzuziehen übrig; und der Ueberrest der wirklichen Subtraktion der kleineren Zahl C von der größeren D erhält eine Beschaffenheit und Benennung, welche der in der Frage vorgelegten entgegengesezt ist: es ist nemlich ein Theil der Größe D und von einerley Nahmen und Beschaffenheit mit dieser; nicht aber mit der Größe C, welches die Frage und die Regel voraussezten. Ebendieser Ueberrest muß daher bey weiteren Verbindungen, wo die allgemeinen Regeln die Addition des Rests der vorigen Subtraktion vorschreiben, abgezogen; hingegen addirt werden, wo die allgemeinen Regeln die Subtraktion eines positiven Rests erfordern. Daher wird auch, wenn a irgend eine positive Größe, n, m irgend welche positive Zahlen bezeichnen: weil $(n-m)a=na-ma$; die Größe $(n-m)a$ positiv seyn, wenn $n>m$, folglich $na>ma$ ist. Wenn aber $n<m$, und also $na<ma$: so wird die Größe $(n-m)a$ negativ $=-(ma-na)=-(m-n)a$;

und bekommt eine Bedeutung, welche der entgegengesezt ist, die die positive Größe $(n-m)a$ hatte. So hat einer, der in einem gewiesen Zeitraum 10 Gulden 12mal einnimmt, aber 5mal ausgibt, von der Summe der Einnahmen $12-5$ d. i. 7mal 10 Gulden übrig: und allgemein, wenn er a Gulden nmal einnimmt und mmal ausgibt, ist der Ueberschuß seiner Einnahmen über die Ausgaben $=(n-m)a$ Gulden. Wenn aber die Anzahl der lezteren Wiederholungen die erstere übertrift; wenn er z. B. 10 G. 6mal eingenommen aber 11mal ausgegeben hat: so hat er nicht allein die ganze Summe der Einnahmen ausgegeben, sondern noch überdiß $11-6$, d. i. 5mal 10 G. Und so zeigt im allgemeinen, wenn $m > n$, der alsdann negative Ueberschuß der Einnahmen über die Ausgaben $(n-m)a = -(m-n)a$ an, daß jezt die Ausgaben die Summe der Einnahmen übersteigen um die Größe $(m-n)a$.

Fig. 12. Wenn also $BC^q > AB^q + AC^q$; folglich der Winkel BAC stumpf ist: so wird die Größe $AB^q + AC^q - BC^q$ negativ; und daher auch der Cosinus von BAC; oder alsdenn ist

$$\text{Cosin. BAC} = \frac{-(BC^q-(AB^q+AC^q))\,\text{sin. tot.}}{2AB \times AC}$$

oder $$-\text{Cosin. BAC} = \frac{BC^q-(AB^q+AC^q)}{2AB\times AC}\,\text{sin. tot.}$$

Was diese Ausdrüke bedeuten, ersieht man leicht aus der besondern Auflösung dieses Falls §. 35. Aus dieser weiß man nemlich, daß

$$\text{sin. ACD oder Cosin. DAC} = \frac{BC^q-(AB^q+AC^q)}{2AB\times AC}\,\text{sin. tot.}$$

daher $-\text{Cosin. BAC} = \text{Cosin. DAC}$ oder sin. ACD.

Der negative Ausdruk des Cosinus eines Winkels BAC zeigt also erstlich an, daß der Winkel stumpf sey; hernach, daß der Winkel, welcher ebendiesem Cosinus als positiv betrachtet in den Tafeln entspricht, der Winkel DAC sey, welcher mit dem stumpfen BAC zusammen zwey rechte Winkel macht; oder daß der spize Winkel, dessen Sinus jenem Cosinus positiv genommen gleich ist, der Winkel ACD sey.

den man zu einem rechten addiren muß, um den Winkel BAC zu erhalten; nicht aber davon abziehen, welches §. 36. *Fig.* 11. geschehen mußte, wo der Cosin. BAC positiv herauskommt.

So wie also zwey Winkel, ein spizer und stumpfer, die zusammen zwey rechte ausmachen, oder deren einer das Supplement des andern ist, einerley Sinus haben, (§. 14.): so haben sie auch einerley Cosinus; doch mit dem Unterschied, daß der Cosinus des stumpfen Winkels negativ ist. Ebenso ist das Complement des stumpfen Winkels negativ: d. h. es fehlt ihm nichts zu einem rechten; man muß im Gegentheil von ihm dieselbe Größe hinwegnehmen, welche man zu dem spizen, der sein Supplement ist, hinzusezen muß, um einen rechten Winkel zu erhalten.

§. 43.

Diß wird noch durch folgende Betrachtungen erläutert. Der Winkel ACE (*Fig.* 17.) sey spiz. So ist das von dem Endpunkt E des Halbmessers CE auf seinen Schenkel CA gefällte Perpendikel EF der Sinus dieses Winkels für den Halbmesser CE (§. 11.): und ebenso ist CF = EK der Sinus seines Complements CEF = ECD, für denselben Halbmesser. Der Cosinus eines spizen Winkels, wie ACE, oder eines Bogen, wie AE, der $< 90°$, ist also dem Segment CF des Schenkels des Winkels oder des Halbmessers CA gleich, das einerseits von C, dem Scheitelpunkt des Winkels oder Mittelpunkt des Bogen, andererseits von seinem Sinus begränzt ist, und auf derselben Seite des Scheitelpunkts oder Mittelpunkts C liegt, nach welcher der Schenkel oder Halbmesser CA sich hin erstrekt. Indem der Winkel ACE und der Bogen AE wachsen: wächst ihr Sinus EF, und rükt dem Scheitel- oder Mittelpunkt C näher; der Cosinus CF aber nimmt ab. Ist der Winkel bis zu dem rechten ACD, und der Bogen zu dem Quadranten AED angewachsen: so fällt ihr Sinus, der seinen gröſten Werth bekommen hat, mit dem Halbmesser zusammen; und ihr Complement und Cosinus verschwinden. Wenn der Winkel und Bogen von da an weiter zunehmen, und jener stumpf, die-

ser > 90° wird: so nimmt ihr Sinus wieder ab; und fällt auf den verlängerten Schenkel oder Halbmesser AC, aber noch immer auf dieselbe Seite der Linie AB: ihr Complement geht aber in den entgegengesezten Zustand über; es fehlt dem Winkel jezt nichts zu einem rechten, dem Bogen nichts zu 90°, das man hinzufügen müßte, sondern es ist ein Ueberschuß da, welcher hinweggenommen werden muß: und der Cosinus, oder das zwischen dem Scheitel- oder Mittelpunkt C und dem Sinus liegenden Segment des Schenkels oder Halbmessers CA, kommt wieder zum Vorschein, aber auf einer Seite des Scheitels oder Mittelpunkts C, welche der Lage, die er vorher auf dem Schenkel oder Halbmesser CA hatte, entgegengesezt ist; und diese der vorigen entgegengesezte Lage wird in dem Calcul durch das Zeichen (—), und durch die Benennung einer negativen Größe angedeutet: weil in der That, wenn man von dem Endpunkt C, wo der Cosinus anfängt, gegen A fortgeht (bey welchem Vorwartsgehen der Abstand von dem Endpunkt C, oder der Cosinus nach dieser Seite hin wächst), alsdenn von dem Punkt A an, wo der Cosinus seinen gröſten Werth erreichte, gegen B zurükgeht; der immer mehr und mehr abnehmende Cosinus oder Abstand von dem Endpunkt C nur so lange noch auf derselben Seite des Endpunkts C liegt, als der Rükgang von A nach B kleiner ist als die Länge AC: wenn man aber weiter von A nach B zurükgeht; der Abstand von dem Endpunkt C oder der Cosinus jezt auf eine der vorigen entgegengesezte Seite fällt, nach welcher hin er, bey fortgesezтem Rükwartsgehen, mehr und mehr zunimmt. Und wenn der stumpfe Winkel ACG einen rechten genau um ebenso viel übertrift, als dem spizen ACE zu einem rechten fehlt; das heißt, wenn der W. DCG = DCE, folglich auch der W. BCG = ACE: so ist beydes GH = EF und CH = CF (El. I, 26.); d. i. sin. ACG = sin. ACE, mit Beybehaltung desselben Zeichens, weil beyde Perpendikel GH, EF auf derselben Seite der geraden Linie AB, nemlich überhalb derselben liegen; aber - Cosin. ACG = Cosin. ACE, oder Cosin. ACG = - Cosin. ACE, weil sie zwar der Länge nach gleich sind, aber auf entgegengesezten Seiten ihres Endpunkts C auf der Linie AB liegen. *)

*) Da (Fig. 17.) beydes $EF^q + CF^q = CE^q$, und $GH^q + CH^q = CG^q$ (I, 47.): so ist sowohl $\sin. ACE^2 + \text{Cosin. } ACE^2$, als $\sin. ACG^2 + \text{Cosin. } ACG^2 = \sin. tot.^2$; d. h. die Summe der Quadrate des Sinus und Cosinus jedes schiefen Winkels ist gleich dem Quadrat des Sinus totus. Uneigentlich hat es auch für den rechten Winkel statt.

Kepler, der die Logarithmen der Cosinus Antilogarithmen nennt (nach einer andern Bedeutung dieses Worts, als der in der Note e zu §. 17. erwähnten), schreibt die Einführung der Abkürzung Cosinus statt Complementi sinus dem Engländer Gunter zu; wahrscheinlich Edmund Guntern, Prof. der Astronomie im Gresham Colledge zu London seit 1619, gest. 1626. (Kästners Gesch. d. Math. III. B. S. 349. f. Vgl. §. 71. Note a): Breviter indicandum est — Logarithmum esse numerum — quo indicatur proportio, quam habet sinus cujusque arcus circuli ad sinum totum seu semidiametrum; Antilogarithmum vero exprimere proportionem sinus complementi cujusque arcus, quem Gunterus Anglus Co-sinum appellat. (Tabulae Rudolphinae 1627. Præcepta, Cap. VIII. p. 18.)

Einige Schriftsteller des 16ten Jahrhunderts gebrauchten die Benennung Sinus rectus secundus; z. B. Petrus Apianus in der §. 16. Note g. angeführten Introductio geographica (Ingolst. 1533. fol. Aiii.) Defin. 7. 8. 9.: sinus rectus semper duplicati arcus chorda est dimidia; sinus rectus primus perpetuo quoque chorda propositi arcus media est, qui duplicatus nonaginta gradibus minor atque inferior est; sinus rectus secundus chorda est media arcus residui usque ad quartam circuli si duplicetur, fere autem semper magis sinus complementi quam sinus rectus secundus appellatur: ferner in dem ebenfalls §. 16. Note g. angeführten Instrumentum primi mobilis (Norimb. 1534. fol. b.), und Instrumentum sinuum (Norimb. 1541. fol. b. 2.): Sinus dividitur in sinum rectum ac versum (S. Anmerk. zu §. 11.). Sinus rectus primus est medietas chordæ arcus dupli ad arcum, cujus est sinus, sive dimidium chordæ respectu totius arcus. Sinus versus est portio diametri a sinu recto ad peripheriam comprehensi [comprehensa], utpote sagitta arcus. Sinus rectus secundus est residuum [sic] cujuslibet arcus, qui restat usque ad complementum quartæ circuli, is semper est æqualis parti dimetientis, quæ a centro circuli ad sinum rectum primum terminatur.

In Thomæ Finkii Flenspurgensis Geometriæ rotundi Libri XIII. Ad Fridericum secundum, Serenissimum Daniæ & Norvegiæ Regem &c. Basileæ MDLXXXIII. 4°. (Kästners Gesch. d. Math. I. B. S. 566. 629. ff. II. B. S. 395.) wird hingegen diese Eintheilung der Sinus bestritten, und die Benennung sinus secundus dem Sinus Versus beygelegt: Lib. V. §. 2. Sinus est recta a termino peripheriæ perpendicularis. §. 6. Sinus est primus aut secundus. Sinus recentiores pene omnes secant in rectum ac versum; rectum demum in primum ac secundum. At distributio illa parum videtur logica. Nam & sinus versus est perpendicularis aut rectus. §. 7. Sinus primus est sinus in diametrum per reliquum arcus terminum ductam. Sinus generatim fuit definitus perpendicularis a termino peripheriæ. In primo autem demittitur eo usque perpendicularis, ut cadat in diametrum ductam per alterum terminum peripheriæ — Atque hic sinus intelligitur, quando sinus simpliciter vocatur. §. 9. Complementum dati arcus vocatur ipsius & peripheriæ quadrantis differentia. — Sinus complementi vulgo dicitur sinus rectus secundus arcus, cujus est complementum. Verum & intelligenter magis dicitur complementi sinus, & in bonis authoribus sinus complementi dicitur. §. 16. Sinus secundus est sinus ab arcus termino in sinum primum. Sinus secundus vulgo versus sinus dicitur; a nonnullis authoribus, nescio qua similitudine, sagitta. Definiri potest segmentum diametri ab arcus termino ad sinum primum perpendiculare: quo tamen verborum cumulo non est opus. Nam, si sinus est, constat, quod sit perpendicularis; et, si in sinum primum cadit, non potest fieri, quin sit segmentum diametri.

Clavius (Theodosii Tripolitæ Sphæricorum Libri III. a Christophoro Clavio Bambergensi, Societatis Jesu, perspicuis demonstrationibus ac scholiis illustrati. Item ejusdem Christophori Clavii sinus, lineæ tangentes et secantes: triangula rectilinea atque sphærica. Romæ MDLXXXVI. 4°.) führt das bisherige blos erzählend an (p. 102. sq.): Nonnulli porro astronomi sinum, quem nos rectum diximus, appellant sinum rectum primum; sinum vero, quem sinum complementi diximus, sinum rectum secundum — sunt alii etiam, qui sinum rectum simpliciter appellent sinum primum; versum autem dicant sinum secundum. Quod dixerim, ut intelligas auctores, qui varie de sinibus sunt locuti. Nos communem modum loquendi retinuimus. Lansberg hin-

gegen (Philippi Lansbergj Triangulorum geometriæ Libri quatuor; in quibus nova. & perspicua methodo & αποδειξει tota ipsorum triangulorum doctrina explicatur. Ad Senatum Populumque Middelburgensem. Lugduni Batavorum cIↃIↃxcI. 4°.) erwähnt (p. 2.) Finks Aenderung der Benennung des Sinus Versus (übrigens mit Annahme seiner allgemein seyn sollenden Definition von Sinus) mißbilligend; §. 5. Sinus est recta linea in semicirculo, ab arcus termino perpendicularis. §. 6. Sinus rectus est aut versus. Recentiores aliqui sinum dividunt in primum & secundum. Nam cum, ex præmissa sinus definitione, versus non minus perpendicularis sit, quam rectus; etiam rectum esse contendant, & proinde vitiosam distributionem philosopho, ubi partes conveniant. Verum cum hoc verso sinui proprium sit, quod recto versus sit, rectus solum modo κατατι; nulla causa est ab usitata divisione recedendi.

Rhäticus und Vieta nennen Sinus und Cosinus Perpendiculum und Basis. S. §. 69. Note c. und §. 71. Note a.

§. 44.

Ebendieser Zusammenhang hat zwischen den Säzen I, 47. II, 12. 13. der Elemente statt, auf welche sich das §§. 34. ff. vorgetragene gründet. Solange der Winkel BAC (*Fig.* 11.) spiz ist, folglich das Segment AD der Grundlinie AB durch das Perpendikel CD von der Grundlinie AB selbst abgeschnitten wird, oder mit dieser auf einerley Seite von A liegt, hat man

$$BC^q = AB^q + AC^q - 2AB \times AD \text{ (II, 13.)}$$

Indem der spize Winkel A wächst, nimmt das Segment AD und das Rechtek $AB \times AD$ immer mehr und mehr ab. Wenn der Winkel A in einen rechten übergeht (*Fig.* 13.): so fällt das Perpendikel CD mit der Seite CA zusammen; das Segment AD und das Rechtek $AB \times BD$ verschwinden, und es wird $BC^q = AB^q + AC^q$ (I, 47.) Wächst der Winkel BAC weiter, (*Fig.* 12.) und geht in einen stumpfen über: so wird das Segment AD von der jenseits A verlängerten Grundlinie AB abgeschnitten, und BC^q wird $= AB^q + AC^q + 2AB \times AD$ (II, 12.): d. h. das Segment AD und das Rechtek $AB \times AD$ bekommen das dem vorhergehenden ent-

gegengeſezte Zeichen; was man vorher als poſitiv betrachtete, geht jezt ins negative mit der entgegengeſezten Lage des Segments AD über.

§. 45.

Den §§. 41. ff. gegebenen Erklärungen zufolge wird die Regel des §. 40. ganz allgemein, und dient zur Beſtimmung eines jeden Winkels irgend eines ungleichſeitigen Dreyeks. Es iſt nämlich allgemein *Fig.* 11. 12. 13.

$$2AB \times AC : AB^q + AC^q - BC^q = \text{sin. tot.} : \text{Cosin. A}$$

oder $\text{Cosin. A} = \frac{AB^q + AC^q - BC^q}{2AB \,.\, AC}$ sin. tot.

§. 46.

Dieſer Ausdruk kann auch unter folgender Form dargeſtellt werden

$$\text{Cosin. A} = \left(\frac{AB}{AC} + \frac{AC}{AB} - \frac{BC^q}{AB \times AC}\right) \frac{\text{sin. tot.}}{2}$$

welche zur Berechnung bequemer iſt, wenn nicht die Seiten des Dreyeks ſelbſt, ſondern ihre Logarithmen durch eine vorherige Rechnung unmittelbar gegeben ſind. Ebenſo

$$\text{Cosin. B} = \frac{BC^q + AB^q - AC^q}{2BC \times AB} \text{ sin. tot.}$$

$$= \left(\frac{BC}{AB} + \frac{AB}{BC} - \frac{AC^q}{BC \times AB}\right) \frac{\text{sin. tot.}}{2}$$

$$\text{Cosin. C} = \frac{BC^q + AC^q - AB^q}{2BC \times AC} \text{ sin. tot.}$$

$$= \left(\frac{BC}{AC} + \frac{AC}{BC} - \frac{AB^q}{BC \times AC}\right) \frac{\text{sin. tot.}}{2}$$

Anwendungen dieſer Regel kommen §. 97. vor.

§. 47.

Noch laſſen ſich die Cosinus der Winkel eines ungleichſeitigen Dreyeks durch ſeine Seiten auf folgende Art ausdrüken, welche zur Berechnung mittelſt Logarithmen ziemlich bequem iſt.

$$\text{Cosin. } A = \frac{AB^q + AC^q - BC^q}{2AB \times AC} \text{ sin. tot. (§. 40.)}$$

$$= \frac{(AB+AC)^q - BC^q - 2AB \times AC}{2AB \times AC} \text{ sin. tot. (II, 4.)}$$

$$= \left(\frac{(AB+AC)^q - BC^q}{2AB \times AC} - 1\right) \text{ sin. tot.}$$

$$= \left(\frac{(AB+AC+BC)(AB+AC-BC)}{2AB \times AC} - 1\right) \text{sin.tot.(II,5.)}$$

$$\text{Ebenſo Cosin. } B = \frac{BC^q + AB^q - AC^q}{2BC \times AB} \text{ sin. tot. (§. 40.)}$$

$$= \frac{(BC+AB)^q - AC^q - 2BC \times AB}{2BC \times AB} \text{ sin. tot. (II, 4.)}$$

$$= \left(\frac{(BC+AB+AC)(BC+AB-AC)}{2BC \times AB} - 1\right) \text{sin.tot.(II,5.)}$$

$$\text{und Cosin. } C = \frac{BC^q + AC^q - AB^q}{2BC \times AC} \text{ sin. tot. (§. 40.)}$$

$$= \frac{(BC+AC)^q - AB^q - 2BC \times AC}{2BC \times AC} \text{ sin. tot. (II, 4.)}$$

$$= \left(\frac{(BC+AC+AB)(BC+AC-AB)}{2BC \times AC} - 1\right) \text{sin.tot.(II,5.)}$$

1. Beyſpiel.

Es ſeyen $AB = 84\frac{1}{2}$ Fuß
$AC = 71\frac{1}{2}$
$BC = 130$

ſo ſind $AB+AC+BC = 286$
$AB+AC = 156$
$BC+AB = 214\frac{1}{2}$
$BC+AC = 201\frac{1}{2}$
$AB+AC-BC = 26$
$BC+AB-AC = 143$
$BC+AC-AB = 117$

$$\frac{(AB+AC+BC)(AB+AC-BC)}{2AB\times AC} = \frac{286.26}{169.71\frac{1}{2}} = \frac{8}{13}$$

$$\frac{(BC+AB+AC)(BC+AB-AC)}{2BC\times AB} = \frac{286.143}{130.169} = \frac{121}{65}$$

$$\frac{(BC+AC+AB)(BC+AC-AB)}{2BC\times AC} = \frac{286.117}{130.143} = \frac{9}{5}$$

$$\frac{(AB+AC+BC)(AB+AC-BC)}{2AB\times AC} - 1 = \frac{8}{13} - 1 = -\frac{5}{13}$$

$$\frac{(BC+AB+AC)(BC+AB-AC)}{2BC\times AB} - 1 = \frac{121}{65} - 1 = \frac{56}{65}$$

$$\frac{(BC+AC+AB)(BC+AC-AB)}{2BC\times AC} - 1 = \frac{9}{5} - 1 = \frac{4}{5}$$

folglich für den Halbmesser 10 000 000

$$\text{Cosin. A} = \frac{50\,000\,000}{13} = 3846154$$

$$\text{Cosin. B} = \frac{560\,000\,000}{65} = 86153\,85$$

$$\text{Cosin. C} = \frac{40\,000\,000}{5} = 8000000$$

und A = 112° 37′ 11″,5
B = 30 30 36,9
C = 36 52 11,6
180 0 0

2. Beyspiel.

Es seyen AB = 8361 Fuß
AC = 7223
BC = 12893

so sind AB+AC+BC = 28477 $\frac{AB+AC+BC}{2} = 14238,5$

AB+AC = 15584
BC+AB = 21254
BC+AC = 20116

AB+AC-BC = 2691
BC+AB-AC = 14031
BC+AC-AB = 11755

Lg. AB = 3,9222582
Lg. AC = 3,8587176
Lg. BC = 4,1103540
Lg. AB × AC = 7,7809758
Lg. (AB+AC-BC) = 3,4299137
Lg. BC×AB = 8,0326122
Lg. (BC+AB-AC) = 4,1470886
Lg. BC × AC = 7,9690716
Lg. (BC+AC-AB) = 4,0702226
Lg. $\frac{AB+AC-BC}{AB \times AC}$ = 5,6489379-10
Lg. $\frac{BC+AB-AC}{BC \times AB}$ = 6,1144764-10
Lg. $\frac{BC+AC-AB}{BC \times AC}$ = 6,1011510-10
Lg. $\frac{AB+AC+BC}{2}$ = 4,1534612
Lg. $\frac{(AB+AC+BC)(AB+AC-BC)}{2AB \times AC}$ = 0,8024921-1
Lg. $\frac{(BC+AB+AC)(BC+AB-AC)}{2BC \times AB}$ = 0,2679406
Lg. $\frac{(BC+AC+AB)(BC+AC-AB)}{2BC \times AC}$ = 0,1246532
$\frac{(AB+AC+BC)(AB+AC-BC)}{2AB \times AC}$ = 0,6344569
$\frac{(BC+AB+AC)(BC+AB+AC)}{2BC \times AB}$ = 1,8532782
$\frac{(BC+AC+AB)(BC+AC-AB)}{2BC \times AC}$ = 1,7972277
$\frac{(AB+AC+BC)(AB+AC-BC)}{2AB \times AC} - 1$ = -0,3655431
$\frac{(BC+AB+AC)(BC+AB-AC)}{2BC \times AB} - 1$ = 0,8532782
$\frac{(BC+AC+AB)(BC+AC-AB)}{2BC \times AB} - 1$ = 0,7972777

Cosin. BAC =	-3655431		
Cosin. ABC =	8532782		
Cosin. ACB =	7972777		
Winkel. BAC =	111°	26′	27″,6
ABC =	31	25	47,8
ACB =	37	7	44,0
	180	0	0

Anmerkung.

In beyden Beyspielen ist

$\frac{(AB+AC+BC)(AB+AC-BC)}{2AB \times AC} < 1$, folglich der Cosin. BAC negativ und der Winkel A stumpf (§. 42.)

In Beziehung auf das erste Beyspiel findet man den zu dem gefundenen Cosinus, als positiv betrachtet, gehörigen Winkel aus den Tafeln

= 67° 22′ 48″,5

welcher von 179 59 60,0 abgezogen

gibt BAC = 112 37 11,5 (§. 42.)

Ebendiesen Winkel findet man auch, wenn man den negativen Cosinus als einen positiven Sinus betrachtet, den zu letzterem gehörigen Winkel in den Tafeln aufsucht, und 90° dazu addirt (§. 42.)

So gehört zu dem Sinus 3846154 im 1. Beyspiel

der Winkel	22°	37′	11″,5
Addirt man dazu	90	0	0
so hat man BAC =	112	37	11,5

§. 48.

Folgende Art, die ungleichseitigen Dreyeke, deren drey Seiten gegeben sind, zu berechnen, ist in vielen Fällen der vorhergehenden vorzuziehen; besonders, wenn man nicht Anlaß hat zu vermuthen, daß das Dreyek rechtwinklicht oder commensurabel sey.

Fig. 18. Man beschreibe in das vorgegebene Dreyek ABC einen Kreis DLK (El. IV, 4.) dessen Mittelpunkt S sey, und dessen Umfang die Seiten des Dreyeks in den Punkten D, L, K berühre. Zieht man aus dem Mittelpunkt S die geraden Linien SA, SB, SC an die Scheitel der Winkel des Dreyeks; so wird dieses in drey gleich hohe Dreyeke SAB, SBC, SAC über den Seiten AB, BC, AC des vorgegebenen Dreyeks (El. III, 18.) getheilt. Das Dreyek ABC ist daher einem Dreyek gleich, dessen Grundlinie der Summe der Seiten des Dreyeks ABC oder seinem Umfang, die Höhe aber dem Halbmesser SD des in das Dreyek ABC beschriebenen Kreises gleich ist (El. VI, 1.); folglich auch dem Rechtek aus seinem halben Umfang und dem Halbmesser des darein beschriebenen Kreises.

Man verlängere zwey Seiten des Dreyeks, z. B. AB, AC; und beschreibe einen andern Kreis, der diese verlängerte Seiten BJ, CN, und die dritte Seite BC des Dreyeks in den Punkten F, H, M berühre. Der Mittelpunkt dieses Kreises wird der Punkt G seyn, in welchem die gerade einen der zwey Winkel CBJ, BCN halbirende Linie die verlängerte AS schneidet, welche den Winkel BAC halbirt (S. Bew. IV, 4. Elem.)

So sind

$$\left.\begin{matrix} AF = AH \\ AD = AK \end{matrix}\right\} \text{ und (Elem. III, 36. Schol. 2. od. Bew. IV, 4.)}$$

folgl. $DF = KH$

d. i. $BD + BF = CK + CH$

oder $BL + BM = CL + CM$ nach den eben angeführt. Sätzen d. Elem.

d. i. $2BM + LM = 2CL + LM$

also $2BM = 2CL$ und $\left.\begin{matrix} BM \\ BF \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} CL \\ CK \end{matrix}\right.$

ferner $2AF = \left\{\begin{matrix} AF + AH \\ AB + \left\{\begin{matrix} BF \\ BM \end{matrix}\right\} + AC + \left\{\begin{matrix} CH \\ CM \end{matrix}\right. \\ AB + AC + BC \end{matrix}\right.$

$AF = \frac{AB+AC+BC}{2}$ = dem halben Umfang des Dreyeks folglich Inhalt des Dreyeks $ABC = AF \times SD$.

Aber $AD : SD = AF : GF$ (VI, 4.)

und daher $AF \times AD : \left\{\begin{matrix} AF.SD \\ \Delta ABC \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} AF.SD \\ \Delta ABC \end{matrix}\right\} : GF.SD$ (VI, 1.)

In dem Vierek FBMG aber, dessen Winkel F und M rechte sind (III, 18), sind die Winkel $FGM + FBM = 2R$ (I, 32. Schol. 6.). Da nun auch die Winkel $ABC + FBM = 2R$ (I, 13.): so ist der Winkel $FGM = ABC$; und auch

$$\tfrac{1}{2}FGM = \tfrac{1}{2}ABC$$

d. i. $FGB = DBS$

Ebenso wird gezeigt, daß der Winkel $FBG = DSB$.

Die bey F und D rechtwinklichten Dreyeke FGB, BSD sind also einander ähnlich (VI, 4.); und

$GF : BF = BD : SD$

daher $FG \times SD = BD \times BF$ (VI, 16.) und

$AF \times AD : \Delta ABC = \Delta ABC : BD \times BF$: wo man schon weiß, daß $AF = \frac{AB+AC+BC}{2} = \frac{1}{2}$ Umfang d. Δ.

ferner $2AD = \begin{cases} AD + AK \\ AB + AC - (BD + CK) \\ AB + AC - (BL + CL) \\ AB + AC - BC \end{cases}$

$2BD = \begin{cases} BD + BL \\ AB + BC - (AD + CL) \\ AB + BC - (AK + CK) \\ AB + BC - AC \end{cases}$

$2BF = \begin{cases} CL + CK \text{ nach dem oben bewiesenen} \\ BC + AC - (BL + AK) \\ BC + AC - (BD + AD) \\ BC + AC - AB \end{cases}$

Also $AD = \frac{AB+AC-BC}{2}$

$BD = \frac{AB+BC-AC}{2}$

$BF = \frac{BC+AC-AB}{2}$

Oder

$$AD = \begin{bmatrix} AF-(BD+BF) \\ AF-(BL+CL) \\ AF-BC \end{bmatrix} = \tfrac{1}{2}\text{Umfang}-BC$$

$$BD = \begin{bmatrix} AF-(AD+BF) \\ AF-(AK+CK) \\ AF-AC \end{bmatrix} = \tfrac{1}{2}\text{Umfang}-AC$$

und $BF = AF-AB = \tfrac{1}{2}\text{Umfang}-AB$

Der Flächeninhalt eines Dreyeks ist also die mitlere geometrische Proportionalgröße zwischen zwey Rechteken, deren Seiten sind der halbe Umfang des Dreyeks und die Hälfte der Ueberschüße von je zwey Seiten des Dreyeks zusammen über die dritte; oder der halbe Umfang und die Ueberschüße desselben über jede der drey Seiten des Dreyeks.

§. 49.

Wird der vermittelst dieses Sazes berechnete Flächeninhalt des Dreyeks durch die Hälfte der größten Seite BC dividirt; so gibt der Quotient die Höhe AE des Dreyeks über der Grundlinie BC (*Fig.* 16.): und alsdenn sind

$$AB : AE = \text{sin. tot.} : \text{sin. } B$$

$$AC : AE = \text{sin. tot.} : \text{sin. } C$$

Diese Berechnung kann ganz durch Logarithmen, ohne Unterbrechung durch Uebergänge von Logarithmen auf Zahlen und von diesen wieder auf jene geführt werden. Und da die an der größten Seite BC des Dreyeks liegenden Winkel B und C nothwendig spiz sind; so findet bey ihrer Bestimmung durch die Sinus keine Zweydeutigkeit statt. Endlich ist der größte Winkel des Dreyeks $BAC = 180° - (B+C)$.

§. 50.

Allgemein, wenn der Umfang des Dreyeks $= S$ gesezt wird, ist nach §. 48.

Inh. des Dreyeks $ABC = \sqrt{\tfrac{1}{2}S(\tfrac{1}{2}S-BC)(\tfrac{1}{2}S-AC)(\tfrac{1}{2}S-AB)}$

oder Inhalt des Dreyeks

$$= \begin{cases} \sqrt{\frac{BC+AB+AC}{2} \times \frac{AB+AC-BC}{2} \times \frac{BC+AB-AC}{2} \times \frac{BC+AC-AB}{2}} \\ \frac{1}{4}\sqrt{(BC+AB+AC)(AB+AC-BC)(BC+AB-AC)(BC+AC-AB)} \end{cases}$$

folglich die Höhe

$$AE = \begin{cases} \frac{\sqrt{\frac{1}{2}S(\frac{1}{2}S-BC)(\frac{1}{2}S-AC)(\frac{1}{2}S-AB)}}{\frac{1}{2}BC} \\ \frac{\sqrt{(BC+AB+AC)(AB+AC-BC)(BC+AB-AC)(BC+AC-AB)}}{2BC} \end{cases}$$

welche Ausdrüke ſich auch auf folgende Art ergeben.

§. 51.

$AE^q = AB^q - BE^q$ (I, 47.) $= (AB+BE)(AB-BE)$ (II, 5.)

und $BE = \frac{BC^q+AB^q-AC^q}{2BC}$ (II, 13.)

daher $AB+BE = \begin{cases} AB+\frac{BC^q+AB^q-AC^q}{2BC} \\ \frac{2AB \times BC+BC^q+AB^q-AC^q}{2BC} \\ \frac{(BC+AB)^q-AC^q}{2BC} \text{ (II, 4.)} \\ \frac{(BC+AB+AC)(BC+AB-AC)}{2BC} \text{ II, 5.)} \end{cases}$

$AB-BE = \begin{cases} AB-\frac{BC^q+AB^q-AC^q}{2BC} \\ \frac{2AB \times BC-BC^q-AB^q+AC^q}{2BC} \\ \frac{AC^q-(AB^q+BC^q-2AB \times BC)}{2BC} \\ \frac{AC^q-(BC-AB)^q}{2BC} \text{ (II, 7)} \\ \frac{(AC+BC-AB)(AC-BC+AB)}{2BC} \end{cases}$

$(AB+BE)(AB-BE) = AE^q =$

$= \frac{(BC+AB+AC)(BC+AB-AC)(BC+AC-AB)(AB+AC-BC)}{4BC^q}$

$$AE = \frac{\sqrt{(BC+AB+AC)(BC+AB-AC)(BC+AC-AB)(AB+AC-BC)}}{2BC}$$

$$AE^q \times BC^q =$$

$$= \frac{(BC+AB+AC)(BC+AB-AC)(BC+AC-AB)(AB+AC-BC)}{4}$$

$$\tfrac{1}{4}AE^q \times BC^q =$$

$$= \left\{ \frac{(BC+AB+AC)(BC+AB-AC)(BC+AC-AB)(AB+AC-BC)}{\frac{BC+AB+AC}{2} \times \frac{BC+AB-AC}{2} \times \frac{BC+AC-AB}{2} \times \frac{AB+AC-BC}{2}} \right.$$

$$\left. \begin{matrix} \tfrac{1}{2}AE.BC \\ \text{oder } \Delta ABC \end{matrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \frac{\tfrac{1}{4}\sqrt{(BC+AB+AC)(BC+AB-AC)(BC+AC-AB)(AB+AC-BC)}}{\sqrt{\frac{BC+AB+AC}{2} \times \frac{BC+AB-AC}{2} \times \frac{BC+AC-AB}{2} \times \frac{AB+AC-BC}{2}}} \right.$$

§. 52.

Uebrigens erhellet von selbst, daß

$$\frac{BC+AB-AC}{2} = \frac{BC+AB+AC}{2} - AC = \tfrac{1}{2}S - AC$$

$$\frac{BC+AC-AB}{2} = \frac{BC+AC+AB}{2} - AB = \tfrac{1}{2}S - AB$$

$$\frac{AB+AC-BC}{2} = \frac{AB+AC+BC}{2} - BC = \tfrac{1}{2}S - BC$$

§. 53.

So können die Sinus der Winkel eines ungleichseitigen Dreyeks auch unabhängig von der Höhe des Dreyeks, welche der §. 49. angezeigte Calcul voraussezt, gleich durch seinen Flächeninhalt, oder unmittelbar durch die gegebenen Seiten selbst bestimmt werden.

Fig. 16. Nach §. 40. sind nämlich

$$\left. \begin{matrix} AB & : & AE \\ 2AB \times BC & : & 2AE \times BC \end{matrix} \right\} = \text{sin. tot.} : \text{sin. B}$$

$$\left. \begin{matrix} AC & : & AE \\ 2AC \times BC & : & 2AE \times BC \end{matrix} \right\} = \text{sin. tot.} : \text{sin. C}$$

und ebenso ist für den Winkel, welcher der gröſten Seite BC des Dreyeks (*Fig.* 11. 12.) gegenüber liegt,

$$\left.\begin{matrix} AC & : & CD \\ 2AB\times AC & : & 2AB\times CD \end{matrix}\right\} = \text{sin. tot.} : \text{sin. A}$$

Aber sowohl $2AE\times BC$ als $2AB\times CD$ ist

= dem vierfachen Inhalt des Dreyeks =

$$= \sqrt{(BC+AB+AC)(AB+AC-BC)(BC+AB-AC)(BC+AC-AB)}$$

(§. 48. 50.)

Folglich verhält sich in jedem ungleichseitigen Dreyek der Sinus eines jeden Winkels zu dem Sinus totus; wie der vierfache Flächeninhalt des Dreyeks, oder wie die mittlere geometrische ProportionalGröße zwischen zwey Rechteken, deren Seiten sind der Umfang des Dreyeks und die Ueberschüße der Summen je zwey seiner Seiten über die dritte, zu dem doppelten Rechtek aus den Seiten um den Winkel.

Es ist für sich klar, daß man auch schließen kan

$\frac{1}{2}AB\times BC : \frac{1}{2}AE\times BC = \text{sin. tot.} : \text{sin. B}$

$\frac{1}{2}AC\times BC : \frac{1}{2}AE\times BC = \text{sin. tot.} : \text{sin. C}$

$\frac{1}{2}AB\times AC : \frac{1}{2}AB\times CD = \text{sin. tot.} : \text{sin. A}$

wo sowohl $\frac{1}{2}AE\times BC$ als $\frac{1}{2}AB\times CD$ = dem Inhalt des Dreyeks $= \sqrt{\frac{1}{2}S(\frac{1}{2}S-BC)(\frac{1}{2}S-AC)(\frac{1}{2}S-AB)}$

Daher verhält sich auch der Sinus eines jeden Winkels eines ungleichseitigen Dreyeks zu dem Sinus totus; wie der Flächeninhalt des Dreyeks, oder wie die mittlere geometrische Proportionalgröße zwischen zwey Rechteken, deren Seiten sind der halbe Umfang des Dreyeks und die Ueberschüße eben dieses halben Umfangs über jede der drey Seiten des Dreyeks, zu der Hälfte des Rechteks aus den Seiten um den Winkel.

§. 54.

Ebendiß folgt aus der §§. 6. 9. angezeigten Art die Winkel eines Dreyeks, dessen drey Seiten gegeben sind, zu be-

stimmen. Nach §. 6. verhält sich nämlich der Durchmesser des um das Dreyek beschriebenen Kreises zu einer Seite des Dreyeks, wie eine andere Seite desselben zu dem aus dem Scheitel des Winkels, welchen diese Seiten einschließen, auf die dritte Seite des Dreyeks gefällten Perpendikel; d. i. (*Fig.* 1.)

$$CD : BC = AC : CM$$

folglich auch $CD : BC = AB \times AC : AB \times CM$ oder $2\Delta ABC$.

Also ist der Durchmesser des um das Dreyek beschriebenen Kreises $= \frac{BC \times AB \times AC}{2\Delta ABC}$:

und daher verhält sich ebendieser Durchmesser zu jeder Seite des Dreyeks wie das Rechtek aus den übrigen Seiten des Dreyeks, zu dem doppelten Inhalt des Dreyeks; d. i. auch

$$CD : AB = BC \times AC : 2\Delta ABC$$

$$CD : AC = BC \times AB : 2\Delta ABC$$

Aber nach §. 9, 10 u. f. ist (*Fig.* 2 3.)

$AD : AB = ad : ab = \frac{1}{2}ad : \frac{1}{2}ab = \text{sin. tot.} : \text{sin. } C$

$AD : BC = ad : bc = \frac{1}{2}ad : \frac{1}{2}bc = \text{sin.tot.} : \text{sin.} BAC$

$AD : AC = ad : ac = \frac{1}{2}ad : \frac{1}{2}ac = \text{sin.tot.} : \text{sin.} ABC$

Also $BC \times AC : 2\Delta ABC = \text{sin. tot.} : \text{sin. } C$

$AB \times AC : 2\Delta ABC = \text{sin. tot.} : \text{sin. } BAC$

$BC \times AB : 2\Delta ABC = \text{sin. tot.} : \text{sin. } ABC.$

§. 55.

Die §. 48. dargestellte Construction gibt aber noch andere einfachere und bequemere Arten an die Hand, die Winkel eines ungleichseitigen Dreyeks unmittelbar aus seinen gegebenen Seiten zu bestimmen: welche vor der vorhergehenden, wodurch man die Sinus der Winkel erhält, auch darin den Vorzug haben, daß sie die Zweydeutigkeit, welche bey dieser in Ansehung der Art des gröſten Winkels statt haben kann (§. 14.) beseitigen; indem sie die halben Winkel des Dreyeks finden lehren, welche unfehlbar spiz sind.

Fig. 18. Es ist nemlich

sowohl $AS : DS = \text{sin. tot.} : \text{sin. } DAS \text{ oder sin. } \frac{1}{2}BAC$

als auch $AG : FG = \text{sin. tot.} : \text{sin. } FAG \text{ oder sin. } \frac{1}{2}BAC$

folglich $AS \times AG : DS \times FG = \overline{\text{sin. tot.}}^2 : \overline{\text{sin. } \frac{1}{2}BAC}^2$

Gleichfalls ist sowohl

$AS : AD = \text{sin. tot.} : \text{Cos. } DAS \text{ oder Cosin. } \frac{1}{2}BAC$

als auch $AG : AF = \text{sin. tot.} : \text{Cos. } FAG \text{ oder Cosin. } \frac{1}{2}BAC$

daher $AS \times AG : AF \times AD = \overline{\text{sin. tot.}}^2 : \overline{\text{Cosin. } \frac{1}{2}BAC}^2$

Nach §. 48. sind aber

$$DS \times FG = \begin{cases} BD \times BF = BL \times CL \\ \frac{AB+BC-AC}{2} \times \frac{BC+AC-AB}{2} \\ \frac{BC+AB-AC}{2} \times \frac{BC-(AB-AC)}{2} \\ (AF-AC)(AF-AB) = (\frac{1}{2}S-AC)(\frac{1}{2}S-AB) \end{cases}$$

und

$$AF \times AD = \begin{cases} \frac{1}{2}S \times \frac{AB+AC-BC}{2} \\ \frac{1}{2}S(\frac{1}{2}S-BC) \end{cases}$$

Es ist also nur noch $AS \times AG$ zu bestimmen übrig.

Da die Winkel $SBC = \frac{1}{2}ABC$

$GBC = \frac{1}{2}FBC$

und $ABC + FBC = 2R$

so ist $\left.\begin{matrix} SBC + GBC \\ \text{d. i. } GBS \end{matrix}\right\} = R$

Ebenso W. $SCB = \frac{1}{2}ACB$

$GCB = \frac{1}{2}HCB$

und $ACB + HCB = 2R$

also $\left.\begin{matrix} SCB + GCB \\ \text{d. i. } SCG \end{matrix}\right\} = R$

Um das Vierek BGCS kann mithin ein Kreis beschrieben werden (IV, 5. Schol. 2.) und daher ist der Winkel

$SBC = CGS$ als in einerley Kreisabschnitt (III, 21.)

oder $SBA = CGA$

Aber auch W. BAS = CAG (Constr.)
also das Dreyek ABS ∽ Dreyek AGC
AS : AB = AC : AG (VI, 4.)
und AS × AG = AB × AC. (VI, 16.)
folglich

$$AB \times AC : \left[\frac{\frac{BC+AB-AC}{2} \times \frac{BC-(AB-AC)}{2}}{(\frac{1}{2}S-AB)(\frac{1}{2}S-AC)}\right] = \overline{\sin.tot.}^2 : \overline{\sin.\tfrac{1}{2}BAC}^2$$

und

$$AB \times AC : \left[\frac{\frac{1}{2}S \times \frac{AB+AC-BC}{2}}{\frac{1}{2}S(\frac{1}{2}S-BC)}\right] = \overline{\sin.tot.}^2 : \overline{Cosin.\tfrac{1}{2}BAC}^2$$

Diese Schlüsse werden ebenso auf jeden der zwey andern Winkel angewendet: indem man die Schenkel derselben verlängert; und einen Kreis beschreibt, der diese verlängerten Schenkel des Winkels und die dritte Seite des Dreyeks berührt, die jenem Winkel gegenüber liegt.

Allgemein verhält sich daher das Quadrat des Sinus der Hälfte eines jeden Winkels eines ungleichseitigen Dreyeks zu dem Quadrat des Sinus totus; wie das Rechtek, dessen Seiten sind die halbe Summe der Gegenseite des Winkels und des Unterschieds der ihm anliegenden Seiten, und der halbe Ueberschuß der Gegenseite des Winkels über denselben halben Unterschied der Seiten um den Winkel, zu dem Rechtek aus den Seiten um den Winkel; oder wie das Rechtek aus den Ueberschüssen des halben Umfangs des Dreyeks über seine den Winkel einschließenden Seiten zu dem Rechtek aus ebendiesen Seiten um den Winkel.

Und das Quadrat des Cosinus der Hälfte eines jeden Winkels des Dreyeks verhält sich zu dem Quadrat des Sinus totus, wie das Rechtek aus dem halben Umfang des Dreyeks und aus dem halben Ueberschuß der Summe der den Winkel einschließenden Seiten über die ihm gegenüberliegende Seite, oder wie das Rechtek aus dem halben Umfang des Dreyeks und aus dem Ueberschuß des halben Umfangs

über die Gegenseite des Winkels zu dem Rechtek aus den Seiten um den Winkel.

§. 56.

Anwendung der Methoden §. 48. f. und §. 55. auf einige der vorhergehenden Beyspiele.

I.

1.) Beyspiel. d. 35. §.

BC = 130 Fuß.
AB = $84\frac{1}{2}$ = 84,5 Fuß.
AC = $71\frac{1}{2}$ = 71,5
S = 286 = Umfang des Dreyeks
$\frac{1}{2}$S = 143
$\frac{1}{2}$S-BC = 13
$\frac{1}{2}$S-AB = $58\frac{1}{2}$ = 58,5
$\frac{1}{2}$S-AC = $71\frac{1}{2}$ = 71,5
$\frac{1}{2}$BC = 65
Lg. $\frac{1}{2}$S = 2,1553360
Lg.($\frac{1}{2}$S-BC) = 1,1139434
Lg.($\frac{1}{2}$S-AB) = 1,7671559
Lg.($\frac{1}{2}$S-AC) = 1,8543060
6,8907413

2)

Lg. ΔABC = 3,4453706 ΔABC = 2788,5 Q.F. wie §. 35.
Lg. $\frac{1}{2}$BC = 1,8129134
Lg. AE = 1,6324572
Lg. AB = 1,9268567
Lg. AC = 1,8543060
Lg. sin. B = 9,7056005 folglich B = 30° 30' 36",8
Lg. sin. C = 9,7781512 C = 36 52 11,6
67 22 48,4
179 59 60,0
A = 112 37 11,6

II.

2.) Beyspiel d. 36. §.

$BC = 61\frac{4}{9}\left|\frac{32}{72}\right.$ R.

$AB = 55\frac{5}{8}\left|\frac{45}{72}\right. = 55{,}625$ R.

$AC = 33\frac{3}{4}\left|\frac{54}{72}\right. = 33{,}75$ R.

$S = 150\frac{59}{72}$ = Umfang des Dreyeks.

$\frac{1}{2}S = 75\frac{59}{144} = \frac{10859}{144}$

$\frac{1}{2}S-BC = 13\frac{131}{144} = \frac{2011}{144}$

$\frac{1}{2}S-AB = 19\frac{113}{144} = \frac{2849}{144}$

$\frac{1}{2}S-AC = 41\frac{95}{144} = \frac{5999}{144}$

$\frac{1}{2}BC = 30\frac{1}{18} = \frac{553}{18}$

Lg. 10859 = 4,0357898

Lg. 2011 = 3,3034121

Lg. 2849 = 3,4546924

Lg. 5999 = 3,7780789

Lg. 144 = 2,1583625

Lg. $\frac{1}{2}S$ = 1,8774273

Lg. $(\frac{1}{2}S-BC)$ = 1,1450496

Lg. $(\frac{1}{2}S-AB)$ = 1,2963299

Lg. $(\frac{1}{2}S-AC)$ = 1,6197164

5,9385232

2)

Lg. ΔABC = 2,9692616 wie §. 36.

Lg. 553 = 2,7427251

Lg. 18 = 1,2552725

Lg. $\frac{1}{2}BC$ = 1,4874526

Lg. AE = 1,4818090

Lg. AB = 1,7452700

Lg. AC = 1,5282738

Lg. sin. B = 9,7365390. folgl. $B = 33^\circ\ 2'\ 12'',8-$

Lg. sin. C = 9,9535352 $C = 63\ 57\ 58,3+$

$97\ \ 0\ 11,1$

$179\ 59\ 60,0$

$BAC = 82\ 59\ 48,9$

Verlangt man aber nicht den Inhalt des Dreyeks, sondern nur seine Winkel, so wird die Rechnung kürzer nach §. 55. geführt.

Es seyen wie vorhin

I. $BC = 130$ Fuß.
$AB = 84\frac{1}{2}$
$AC = 71\frac{1}{2}$
$S = 286$
$\frac{1}{2}S = 143$
$\frac{1}{2}S - AB = 58\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}S - AC = 71\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}S - BC = 13$

Oder $AB = 84\frac{1}{2}$
$AC = 71\frac{1}{2}$
$AB - AC = 13$
$AB + AC = 156$
$BC = 130$
$BC - (AB - AC) = 117$ $\frac{BC-(AB-AC)}{2} = 58\frac{1}{2}$ F.
$BC + (AB - AC) = 143$ $\frac{BC+(AB-AC)}{2} = 71\frac{1}{2}$
$AB + AC - BC = 26$ $\frac{AB+AC-BC}{2} = 13$

Lg. $(\frac{1}{2}S - AB)$ oder Lg. $\frac{BC-(AB-AC)}{2} = 1{,}7671559$
Lg. $(\frac{1}{2}S - AC)$ oder Lg. $\frac{BC+(AB-AC)}{2} = 1{,}8543060$
Lg. $\frac{1}{2}S = 2{,}1553360$
Lg. $(\frac{1}{2}S - BC)$ oder Lg. $\frac{AB+AC-BC}{2} = 1{,}1139434$
Lg. sin. tot^2 $= 20{,}$
$23{,}6214619$
$23{,}2692794$
Lg. $AB = 1{,}9268507$
Lg. $AC = 1{,}8543060$
Lg. $AB \times AC = 3{,}7811627$
Lg. sin. $\frac{1}{2}BAC^2 = 19{,}8402992$
Lg. Cos. $\frac{1}{2}BAC^2 = 19{,}4881167$
Lg. sin. $\frac{1}{2}BAC = 9{,}9201496$
Lg. Cosin. $\frac{1}{2}BAC = 9{,}7440583\frac{5}{8}$
hienach $\frac{1}{2}BAC = 56° 18' 35''{,}7\frac{8}{24}$
und $BAC = 112\ 37\ 11{,}\frac{56}{48}$

II. $BC = 61\frac{4}{9} \mid \frac{32}{72}$ Ruthen.
$AB = 55\frac{5}{8} \mid \frac{45}{72} = 55{,}625$
$AC = 33\frac{3}{4} \mid \frac{54}{72} = 33{,}75$
$S = 150\frac{59}{72}$
$\frac{1}{2}S = 75\frac{59}{144} = \frac{10859}{144}$
$\frac{1}{2}S - AB = 19\frac{113}{144} = \frac{2849}{144}$
$\frac{1}{2}S - AC = 41\frac{95}{144} = \frac{5999}{144}$
$\frac{1}{2}S - BC = 13\frac{139}{144} = \frac{2011}{144}$ so hat man

Lg. $(\frac{1}{2}S - AB) = 1{,}2963299$
Lg. $(\frac{1}{2}S - AC) = 1{,}6197164$
Lg. $\frac{1}{2}S = 1{,}8774273$
Lg. $(\frac{1}{2}S - BC) = 1{,}1450496$
Lg. sin. tot.$^2 = 20{,}$
$= 22{,}9160403$
$= 23{,}0224769$
Lg. AB $= 1{,}7452700$
Lg. AC $= 1{,}5282738$
Lg. AB × AC $= 3{,}2735438$
Lg. sin. $\frac{1}{2}BAC^2 = 19{,}0425025$
Lg. Cosin. $\frac{1}{2}BAC^2 = 19{,}7489331$
Lg. sin. $\frac{1}{2}BAC = 9{,}82125125$ $\frac{1}{2}BAC = 41°29'54'',4$
Lg. Cosin. $\frac{1}{2}BAC = 9{,}87446655$ $BAC = 82\ 59\ 48{,}8$

§. 57.

Der Zusammenhang der Formeln §. 40. 55. ergibt sich aus folgender allgemeinen Bemerkung.

HCB (*Fig.* 9.) sey ein beliebiger spizer Winkel. Man verlängere desselben einen Schenkel HC nach A; beschreibe aus seinem Scheitelpunkt C als Mittelpunkt mit einem beliebigen Halbmesser CH einen Kreis, welcher von dem andern Schenkel BC das Stük CE, und von der Verlängerung des ersten das Stük CD abschneide. Ein Perpendikel von dem Endpunkt E des Halbmessers CE auf den Schenkel CH ge-

fällt wird der Sinus (§. 11.), und CF der Cosinus (§. 43.) des Winkels HCE für den Sinus totus CH seyn. Man ziehe die Chorde HE; und fälle auf sie aus dem Mittelpunkt C das Perpendikel CK, welches folglich sowohl den Winkel HCE als die Chorde HE halbirt (I, 26.): so wird HK = EK der Sinus, CK der Cosinus der Hälfte des Winkels HCE für denselben Halbmesser seyn. Wird endlich DE gezogen: so ist, weil sowohl CKH (constr.) als DEH (III, 31.) = R, die CK mit der DE parallel (I. 28); und, weil HC $\frac{1}{2}$HD, auch CK = $\frac{1}{2}$DE (VI, 4.). Die rechtwinklichten Dreyeke CHK, HFE haben den Winkel bey H gemein; folglich sind (VI, 4. 8. 21.) die Dreyeke CHK, HFE, DFE einander ähnlich. Daher

$$1)\ CH : HK = \begin{cases} HE : HF \\ \frac{1}{2}HE : \frac{1}{2}HF \\ HK : \frac{CH \cdot CF}{2} \end{cases}$$

d. i. $\sin.tot. : \sin.\frac{1}{2}HCE = \sin.\frac{1}{2}HCE : \frac{\sin.tot. - Cos.HCE}{2}$

ferner

$$2)\ CH : CK = \begin{cases} DE : DF \\ \frac{1}{2}DE : \frac{1}{2}DF \\ CK : \frac{CD + CF}{2} \end{cases}$$

d. i. $\sin.tot. : Cosin.\frac{1}{2}HCE = Cosin.\frac{1}{2}HCE : \frac{\sin.tot. + Cosin.HCE}{2}$

In Beziehung auf den stumpfen Winkel DCE hat man, wenn durch den Mittelpunkt C die CN mit HE parallel, folglich (I, 29.) auf DE senkrecht gezogen wird, DCL = $\frac{1}{2}$DCE, DL = LE = CK = $\sin.\frac{1}{2}$DCE; CL = EK = HK = $Cosin.\frac{1}{2}$DCE; CF = Cosin.HCE = -Cosin. DCE (§. 42. f.): folglich aus der ersten der vorhergehenden Proportionen

$$\sin.tot. : Cosin.\frac{1}{2}DCE = Cosin.\frac{1}{2}DCE : \begin{cases} \frac{\sin.tot. - Cosin.HCE}{2} \\ \frac{\sin.tot. + Cosin.DCE}{2} \end{cases}$$

und aus der zweyten

$$\text{sin. tot.} : \text{sin.}\tfrac{1}{2}\text{DCE} = \text{sin.}\tfrac{1}{2}\text{DCE} : \begin{cases} \dfrac{\text{sin. tot.} + \text{Cosin. HCE}}{2} \\ \dfrac{\text{sin. tot.} - \text{Cosin. DCE}}{2} \end{cases}$$

Und für $\text{ACJ} = \frac{1}{2}\text{ACD} = \frac{1}{2}\text{R}$ (*Fig.* 17.), wo Cosin. $\text{ACD} = 0$ (§. 41. 43.), sind (VI, 8. Zus.), wenn LM auf AC senkrecht, oder mit DC parallel gezogen wird, folglich (VI, 2.) AC halbirt, $\text{AC} : \text{AL} = \text{AL} : \text{AM}$

$$\text{AC} : \text{CL} = \text{CL} : \text{CM}$$

d. h. $\text{sin. tot.} : \begin{cases} \text{sin.}\frac{1}{2}\text{ACD} = \text{sin.}\frac{1}{2}\text{ACD} \\ \text{Cosin.}\frac{1}{2}\text{ACD} = \text{Cosin.}\frac{1}{2}\text{ACD} \end{cases} : \frac{\text{sin. tot.}}{2}$

Es ist also allgemein, wenn A einen beliebigen, spizen, rechten, oder stumpfen, Winkel bezeichnet:

$$\text{sin. tot.} : \text{sin.}\tfrac{1}{2}\text{A} = \text{sin.}\tfrac{1}{2}\text{A} : \frac{\text{sin. tot.} - \text{Cos. A}}{2}$$

$$\text{sin. tot.} : \text{Cos.}\tfrac{1}{2}\text{A} = \text{Cos.}\tfrac{1}{2}\text{A} : \frac{\text{sin. tot.} + \text{Cos. A}}{2}$$

$$\overline{\text{sin.}\tfrac{1}{2}\text{A}}^2 = \frac{\text{sin. tot.} - \text{Cos. A}}{2} \text{ sin. tot.}$$

$$\overline{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}\text{A}}^2 = \frac{\text{sin. tot.} + \text{Cos. A}}{2} \text{ sin. tot.}$$

und (VI, 20. Zus.)

$$\text{sin. tot.} : \frac{\text{sin. tot.} - \text{Cosin. A}}{2} = \overline{\text{sin. tot.}}^2 : \overline{\text{sin.}\tfrac{1}{2}\text{A}}^2$$

$$\text{sin. tot.} : \frac{\text{sin. tot.} + \text{Cosin. A}}{2} = \overline{\text{sin. tot.}}^2 : \overline{\text{Cosin.}\tfrac{1}{2}\text{A}}^2$$

§. 58.

Da nun (*Fig.* 11. 12. 13.)

$2\text{AB} \times \text{AC} : \text{AB}^q + \text{AC}^q - \text{BC}^q = \text{sin. tot.} : \text{Cosin. A}$ (§. 45.)

so ist 1°.

$$2\text{AB} \times \text{AC} : \begin{cases} 2\text{AB} \times \text{AC} - \text{AB}^q - \text{AC}^q + \text{BC}^q \\ \text{BC}^q - (\text{AB}^q + \text{AC}^q - 2\text{AB} \times \text{AC}) \\ \text{BC}^q - (\text{AB} - \text{AC})^q \\ (\text{BC} + \text{AB} - \text{AC})(\text{BC} - (\text{AB} - \text{AC})) \end{cases}$$

$$= \text{sin. tot.} : \text{sin. tot.} - \text{Cos. A}$$

$$AB \times AC : \frac{BC+AB+AC}{2} \times \frac{BC-(AB-AC)}{2} = \text{sin. tot.} : \frac{\text{sin. tot.} - \text{Cos. A}}{2}$$

$$= \overline{\text{sin. tot.}}^2 : \overline{\text{sin. } \tfrac{1}{2}A}^2$$

$$2°.\ 2AB \times AC : \begin{bmatrix} 2AB \times AC + AB^q + AC^q - BC^q \\ (AB+AC)^q - BC^q \\ (AB+AC+BC)(AB+AC-BC) \end{bmatrix}$$

$$= \text{sin. tot.} : \text{sin. tot.} + \text{Cos. A}$$

$$AB \times AC : \frac{AB+AC+BC}{2} \times \frac{AB+AC-BC}{2} = \text{sin. tot.} : \frac{\text{sin. tot.} + \text{Cos. A}}{2}$$

$$= \overline{\text{sin. tot.}}^2 : \overline{\text{Cosin. } \tfrac{1}{2}A}^2$$

§. 59.

Es ist noch der Fall abzuhandeln übrig, wenn ein Winkel eines Dreyeks und die zwey ihn einschliessenden Seiten gegeben sind.

Wenn diese erstlich gleich sind und einen rechten Winkel einschliesen, wie AB, AC (*Fig.* 19.): so ist jeder der zwey übrigen Winkel B, $C = \frac{1}{2}$ rechten (El. I, 5. 32.); die dritte Seite $BC = \sqrt{2AB^q} = AB\sqrt{2}$ (I, 47.) und der Inhalt des Dreyeks $= \frac{1}{2}AB^q$.

§. 60.

Wenn zweytens die gegebenen Seiten AB, AC wiederum gleich sind, aber einen schiefen Winkel einschliesen (*Fig.* 20. 21.): so ist jeder der zwey übrigen Winkel B, $ACB = \frac{2R-BAC}{2} = R - \frac{1}{2}BAC$ (I, 5. 32.). Die dritte Seite BC, welche von der den gegebenen Winkel BAC halbirenden geraden Linie AE ebenfalls halbirt und rechtwinklicht geschnitten wird (I, 4.), erhält man durch die Proportion (§. 18.) sin. tot. : sin. $\frac{1}{2}$BAC : $\begin{cases} AB : BE \\ 2AB : BC \end{cases}$ daher $BC = \frac{2\text{sin. } \frac{1}{2}BAC}{\text{sin. tot.}} AB$

Das auf die eine AB der zwey gegebenen Seiten, als Grundlinie, aus dem Scheitelpunkt des gegenüberliegenden Winkels C gefällte Perpendikel, oder des Dreyeks Höhe, CD, und sein Inhalt werden (§. 18.) vermittelst der Proportionen gefunden.

$\sin.tot. : \sin. BAC = \begin{cases} AC \text{ oder } AB : CD \\ \frac{1}{2}AB^q : \frac{1}{2}AB \times CD \end{cases}$

daher die Höhe $CD = \frac{\sin. BAC}{\sin. tot.} AB$

Inhalt des Dreyeks $= \frac{\sin. BAC}{2\sin.tot.} AB^q$.

Wenn übrigens der gegebene Winkel BAC, welchen die gegebenen Seiten AB, AC einschließen, $\frac{2}{3}$ eines rechten oder 60° ist: so ist das Dreyek gleichseitig (I, 5. 32.); und seine Höhe und Inhalt werden wie §. 22. bestimmt.

1.) Beyspiel. *Fig.* 20.

$\left.\begin{matrix} AB \\ AC \end{matrix}\right\} = 125$ F.

$BAC = 47° 36'$

$\frac{1}{2}BAC = 23\ 48$

$\left.\begin{matrix} B \\ ACB \end{matrix}\right\} = \begin{matrix} 89\ 60 \\ 66\ 12 \end{matrix}$

Lg. $\sin.\frac{1}{2}BAC$	= 9,6058923	
Lg. 2	= 0,3010300	
Lg. $\sin. BAC$	= 9,8683242	
Lg. $\begin{cases} AB \\ AC \end{cases}$	= 2,0969100	
Lg. BC	= 2,0038323	BC = 100,886+
Lg. CD	= 1,9652342	Fuß.
Lg. $AB \times CD$	= 4,0621442	
Lg. 2	= 0,3010300	
Lg. ΔABC	= 3,7611142	ΔABC = 5769,18 Q. F.

Oder

Lg. $\sin.\frac{1}{2}BAC$	= 9,6058923	
Lg. $\sin. BAC$	= 9,8683242	
Lg. 2	= 0,3010300	
Lg. $2\sin.\frac{1}{2}A$	= 9,9069223	
Lg. $\frac{1}{2}\sin. A$	= 9,5672942	
Lg. AB	= 2,0969100	
Lg. AB^q	= 4,1938200	
Lg. BC	= 2,0038323	
Lg. ΔABC	= 3,7611142	wie vorhin.

2. Beyspiel. *Fig.* 21.

$\left.\begin{matrix} AB \\ AC \end{matrix}\right\} = 108$ F.

$BAC = 131° 28'$

$\frac{1}{2}BAC = 65\ 44$

$89\ 60$

$\left.\begin{matrix} B \\ ACB \end{matrix}\right\} = 24\ 16$

$CAD = 48\ 32$

Lg. sin. $\frac{1}{2}$BAC	= 9,9598246
Lg. 2	= 0,3010300
Lg. sin. BAC	= 9,8746795
Lg. $\left\{\begin{matrix} AB \\ AC \end{matrix}\right\}$	= 2,9334238
Lg. BC	= 2,2942784
Lg. CD	= 1,9081033
Lg. AB × CD	= 3,9415271
Lg. 2	= 0,3010300
Lg. ΔABC	= 3,6404971

daher BC = 196,915 - Fuß.
CD = 80,929 -
ΔABC = 4370,162 Quadratfuß.

§. 61.

Wenn drittens die gegebenen Seiten AB, AC des Dreyecks ungleich sind, aber einen rechten Winkel einschliesen (*Fig.* 22.): so ist

der Inhalt des Dreyecks $= \frac{1}{2}AB \times AC$.

und die dritte Seite $BC = \sqrt{AB^q + AC^q}$ (I, 47.)

worauf die übrigen zwey Winkel durch eine der zwey Proportionen (§. 34.) gefunden werden.

$$\left.\begin{matrix} BC \\ \text{od.} \sqrt{AB^q + AC^q} \end{matrix}\right] : \left\{\begin{matrix} AB \\ AC \end{matrix}\right\} = \text{sin. tot.} : \left\{\begin{matrix} \text{sin. C od. Cosin. B} \\ \text{sin. B od. Cosin. C} \end{matrix}\right.$$

1.) Beyspiel.

$AB = 52$ Ruthen.
$AC = 39$
$\frac{1}{2}AB = 26$

234
78

$\Delta ABC = 1014$ Q. R.

$AB^q = 2704$ Q. Ruthen.
$AC^q = 1521$
$BC^q = 4225$
$BC = 65$ R.

Lg. AC = 1,5910646
Lg. AB = 1,7160033
Lg. BC = 1,8129134

Lg. sin. B } Lg. Cosin. C } = 9,7781512 B = 36° 52' 11",6+
Lg. sin. C } Lg. Cosin. B } = 9,9030899 C = 53 7 48,4-
90 0 0

2) Beyspiel.

AB = 143 R. AB^q = 20449 Q.R.
AC = 96 AC^q = 9216
$\frac{1}{2}$AC = 48 BC^q = 29665
ΔABC = 6864 Q.R. BC = 172,2353+ R.

Oder wenn man BC durch Logarithmen sucht.

Lg. BC^q = 4,4722444;
Lg. BC = 2,2361222 BC = 172,2353 R.
Lg. AB = 2,1553360
Lg. AC = 1,9822712

Lg. sin. C } Lg. Cosin. B } = 9,9192138 C = 56° 7' 31",5
Lg. sin. B } Lg. Cosin. C } = 9,7461490 B = 33 52 28,5
90 0 0

§. 62.

Diese Art die übrigen zwey Winkel des Dreyeks zu bestimmen hat die Unbequemlichkeit, daß sie von der dritten, nicht gegebenen, Seite abhängt (§ 37.); wenigstens auf eine nicht ganz einfache Rechnung hinaus lauft: dergleichen hingegen folgende oder ähnliche (a) Schlüsse einzuleiten dienen.

Wenn (*Fig.* 23. 24.) aus B als Mittelpunkt mit dem Halbmesser BA zwischen den Schenkeln des Winkels B der Bogen AK, oder aus C als Mittelpunkt mit dem Halbmes-

(a) Siehe die folgende Note e.

ſer CA der Bogen AL zwiſchen den Schenkeln des Winkels C beſchrieben wird; ſo berührt den erſten des Dreyeks Seite AC, den andern die Seite AB, in dem Punkt A (III, 16.): und wenn die Winkel B, C aliquote Theile zweyer rechten, oder (VI, 33.) die Bögen AK, AL aliquote Theile ihrer halben Umkreiſe ſind; ſo ſind die geraden Linien AC, AB Hälften der Seiten regulärer um jene Kreiſe beſchriebener Figuren, deren Winkel am Mittelpunkt die doppelten der Winkel B, C (IV, 12. 13.) ſind; und man würde dieſe Winkel B, C kennen, wenn man die Winkel an dem Mittelpunkt, oder, was auf daſſelbe hinauslauft, die Anzahlen der Seiten der um die Kreiſe von den Halbmeſſern BA, CA beſchriebenen regulären Figuren, kennte, deren halbe Seiten AC, AB wären.

Die Schwierigkeiten dieſer Methode zu heben, welche denenjenigen ganz ähnlich ſind, die oben (§. 6.) bey den regulären in einen Kreis beſchriebenen Figuren vorkamen, konnte man den ähnlichen Weg, wie bey dieſen (§. 7. ff.), einſchlagen. Da nämlich die Hälften AC und DF, oder AB und GH der Seiten ähnlicher (oder einerley Anzahl Seiten habender) regulärer um verſchiedene Kreiſe beſchriebener Figuren ſich verhalten wie die Halbmeſſer BA und BD oder CA und CG dieſer Kreiſe (VI, 4.): ſo iſt die Berechnung dieſer Seiten oder ihrer Hälften für irgend einen Halbmeſſer ebenfalls zu dem beabſichteten Gebrauch hinreichend. Ueberdiß haben die Proportionen

$$BA : BD = AC : DF \text{ oder } BA : AC = BD : DF$$
$$CA : CG = AB : GH \text{ oder } CA : AB = CG : GH$$

ſtatt (VI, 4 V, 16.): wenn gleich die Winkel B, C keine aliquoten Theile zweyer rechten; folglich die Bogen AK, DE, AL, GJ keine aliquote Theile ihrer halben Umkreiſe; und die Perpendikel AC, DF, AB, GH nicht Hälften der Seiten regulärer um jene Kreiſe beſchriebener Figuren ſind.

Dieſe Perpendikel, welche die Bogen, die die Winkel meſſen, in dem einen ihrer Endpunkte berühren, ſind daher überhaupt Tangenten dieſer Winkel oder Bogen genennt

worden: nemlich AC, DF, heissen die Tangenten des Winkels B für die Halbmesser BA, BD; AB, GH, die Tangenten des Winkels C für die Halbmesser CA, CG: und man hat die Tangenten der spizen Winkel, ebenso wie ihre Sinus (§. 16.), in Theilen des Halbmessers berechnet und in Tafeln gebracht. Bey uns in dem Occident (b) hat Regiomon-

(b) Von einer früheren orientalischen Tangententafel in Sechszigtheilen u. s. w. des Halbmessers nach ptolemäischer Art geben des Herrn von Zach Allgem. geograph. Ephemeriden, III. Bd. 2 St. und IV. B. 2 St. Febr. und Aug. 1799. aus Briefen des Herrn D. Burckhardt in Paris folgende Nachricht: „In einem Manuscript von" Ulugh-Beighs astronomischen Tafeln, welches" Beauchamp im Jahr 1788. gekauft hat, und das sich jezt" bey Lalande befindet, folgt auf die Einleitung zu den Son-" nentafeln eine Tafel der Sinus von Minute zu Minute für" den ersten Quadranten, nebst ihren Differenzen; hierauf" eine ganz ähnliche Tafel der Tangenten bis 45°, worin z." B. Tg. 1° = 1 Th. 2′ 50″ 17‴ 38ᴵᵛ "
Tg. 10° = 10 34 46 37 40 "
Tg. 20° = 21 50 17 34 14 "
Tg. 30° = 34 38 27 39 29 "
Tg. 40° = 50 20 45 31 13 "
Tg. 45° = 60 0 0 0 0."

Diese Ausdrüke der Tangenten reichen also bis auf 777 600 ooote Theiledes Halbmessers; und die hier angeführte stimmen wirklich mit denjenigen überein, welche für sovielte Theile des Halbmessers aus den Tangenten für den Sinus totus = 1000 000 000 hergeleitet werden.

Ulugh-Beigh, Enkel des berühmten Tamerlan, regierte zu Samarcande in der Bucharey theils mit seinem Vater Scharock, theils allein, über vierzig Jahre, bis 1449. Ein Theil seiner astronomischen Tafeln ist gedrukt unter dem Titel: Tabulæ longitudinis & latitudinis stellarum fixarum ex observatione Vlughbeighi, Tamerlanis M. nepotis, regionum ultra citraque Giihun (i. e. Oxum) Principis potentissimi. Ex tribus invicem collatis MS. Persicis jam primum luce ac latio donavit, et commentariis illustravit Thomas Hyde. Oxon. 1665. 4°. Dieses FixsternVerzeichniß ist von 1437. datirt. (Weidler p. 241. sq. Montucla T. I. p. 390. sqq. 410. sq. Bailly Gesch. d. neuern Astron. II. B. S. 46. f. 82. ff.)

tanus den Gebrauch der Tangenten in dem trigonometrischen Calcul eingeführt; und eine Tafel derselben, aber nur durch ganze Grade, für den Halbmesser = 100000, unter dem Namen Tabula foecunda in seine Tabulas directionum profectionumque (c) eingerükt.

(c) fol. d. 8. der in der Note zu §. 16. beschriebenen Ratdoltischen Ausgabe. (Kästners geom. Abh. I. Samml. S. 548. Gesch. d. Math. I. B. S. 557. ff.)

In den den Tafeln vorausgeschikten sphärisch-astronomischen Aufgaben gebraucht Regiomontanus zur Auflösung der vierten und zehnten Sinus und Tangenten, statt Sinus allein nach der Anweisung des 27. Satzes seines IV. Buchs De triangulis; und zu Ende der zehnten gibt er folgenden Grund der Benennung seiner Tangententafel an: Tabellam sæpe dictam non injuria fœcundam appellare libuit, quod multifariam ac mirandam utilitatem instar fœcundæ arboris parere soleat. In beyden Aufgaben aber beziehet er sich auf eine Tabellam fœcundam duplici introitu; und führt daraus unmittelbar 17363 für die Tangente von 9° 51′ an.

Noch sind die Zahlen, welche er in seiner, Tabula generalis cœli mediationum überschriebenen, Hülfstafel (die er namentlich auch in seiner vierten Aufgabe gebraucht) unter der Aufschrift Numerus multiplicandus angibt, die Cotangenten für den Halbmesser 60000 von den Winkeln, welche auf der Ekliptik senkrechte Bogen grösster Kreise mit dem Aequator machen.

In seinen Büchern De triangulis, deren Ausarbeitung in das Jahr 1462, höchstens noch in die erste Hälfte des Jahrs 1463. zu sezen zu seyn scheint (§. 16. Note d): löset Regiomontanus alle Aufgaben der ebenen und sphärischen Dreyeke bloß durch Sinus auf. In dem Beweis des 27 Satzes des I. Buchs: Trianguli rectanguli duobus lateribus cognitis omnes angulos datum iri, sagt er sogar: Si alterutrum datorum laterum recto opponatur angulo, satis est: si vero non, per præcedentem [Prop.] ipsum addiscemus; nam absque eo propositum attingendi non erit potestas.

In Venedig arbeitete er in der zweyten Hälfte des Jahrs 1463, und zu Anfang des folgenden, an der Berechnung und Anwendung seiner Tabula primi mobilis (S. §. 16. Note b). Diese Tafel dient, einen Winkel oder Bogen, dessen Sinus dem Product der Sinus zwey gegebener Winkel oder Bogen dividirt durch den Sinus totus, oder dem Product des Sinus totus durch den Quotienten der Division des Sinus zwey gegebener Winkel oder Bogen gleich ist, unmittelbar durch die gegebe-

Ein von Erasmus Reinhold, Prof. der Math. zu

nen Winkel oder Bogen ſelbſt zu finden (Käſtners Geſch. d. Math. II. B. S. 532. ff.); und ſo ſezen die Auflöſungen der vorausgeſchikten drey und ſechszig ſphäriſch-aſtronomiſchen Aufgaben wiederum nur Sinus voraus, auf welche ſie manchmal nicht ohne Umſchweife zurükgeführt werden (Vgl. z. B. Probl. LII. mit Probl. IV. Tabul. Direct.). Regiomontanus ſchreibt von dieſer Tafel an Blanchini in dem §. 16. Note d angeführten Brief (l. c. p. 85. sq.): Dum igitur et egregie soluistis uniuersa (die ihm in dem erſten Brief von Regiomontanus vorgelegte ſphäriſch-aſtronomiſche Aufgaben), et quidem faciliter per tabulas uestras [primi mobilis], ego autem quicquid nunc Venetiis numerabo, nonnisi per tabulam sinus consequi potero. Illud tamen non sit impedimento, quin ad me scribatis quotquot et quecunque uoletis interrogatoria. Si enim satis reuidebo, scietis me labore ingenti id efficere: si minus digne, excusabitis inermem. Quodsi ea, quam sub manibus habeo, tabula absoluta esset, facile omnia, que ad primum mobile referuntur, per alia multa possent expediri absque numerorum multiplicatione et diuisione, absque sinuum per arcus, et uice uersa, extractione. De qua quidem tabula si ueritatem mediocriter etiam dixero, nimis gloriari uidebor, cum res admodum noua et hactenus infecta sit. Quicquid per eam inuestigare libebit, duobus tantum numeris introitalibus egebimus, quorum alterum in latere transuersali, alterum in descendenti tabule immittemus, et in angulo communi reperiemus quesitum. Duos huic tabule accommodabo libellos, quorum primus quidem fundamenta tabule et operationum eius firmabit, secundus uero quanam lege quilibet omnino nouus artis discipulus per eam operari expedite possit. Decreui autem ad dom. uestram nunc mittere utilitates quasdam huius tabule — ut iudicium uestrum hac in re quale sit persentiam. Reliqua uero huiusmodi operis uidebitis, ubi nomine domini mei reuerendissimi [Cardinalis Bessarionis] uniuersis philosophie cultoribus diuulgabuntur. Proposita ipsa utilitatum seu fructuum colligetis in postrema membrana. Dieſe iſt p. 94. sqq. abgedrukt, mit dem Eingang: Pollicebar superius propositiones secundi libri ad tabulam meam pertinentis seriatim perstringere, quod nunc persoluam ex ordine. Die nun folgende vierzig Aufgaben ſind, mit Weglaſſung der 30, 33, 39, 40ten, und Einſchaltung 27 anderer, eben die vorhin erwähnten drey und ſechszig der gedrukten Tabulæ primi mobilis vorange-

Wittenberg (d), für den Halbmesser = 10 000 000 berechneter, auf einzelne Minuten ausgedehnter Canon fœcundus steht in desselben zu Tübingen 1554. gedrukten Primus Liber Tabularum directionum (e) fol. 17-51; mit Regio-

Albatenius (De scient. stell. Cap. X. fol. 14.) verweiset auf eine Tabula altitudinis [solis] & umbræ, welche aber wenigstens in der Nürnberg. Ausgabe seines Werks fehlt. Der Anweisung nach, die er zum Gebrauch derselben gibt, enthielte sie für alle Grade der Sonnenhöhe ABC (Fig. 22. 24.) von 0 bis 90, die Länge AB des horizontalen Schattens eines senkrechten Stabs AC in Zwölftheilen der Länge von diesem; mithin (Vgl. §. 14. Note d am Ende, und §. 64. 67.) Tangenten von C, oder Cotangenten von ABC durch alle Grade in Zwölftheilen des Halbmessers CA (S. Kästners Anfangsgr. d. ang. Math. 3te Aufl. I. Thl. S. 224. f.). Eine solche Tafel steht in Orontii Finei — Protomathesis (Paris 1532.) fol. 139. Cosmograph. Lib. IV. Cap. 4. Vgl. das Ende der folgenden Note e.

(d) geboren zu Saalfeld in Thüringen 1511; gestorben zu Wittenberg den 19. Febr. 1553. (Weidler p. 353. sqq. Kästners Gesch. d. Math. S. 349. ff. 698. ff. und oben §. 16. Note h.)

(e) Der vollständige Titel ist: Liber tabularum directionum, discentibus prima elementa astronomiæ utilissimus. His insertus est Canon fecundus ad singula scrupula quadrantis propogatus. Item nova Tabula climatum & parallelorum, item umbrarum. Appendix canonum secundi Libri directionum, qui in Regiomontani opere desiderantur. Autore Erasmo Rheinholdo Salveldensi. Tubingæ. Anno MDLIII. 4°. Rheinholds Zueignungsschrift an den Herzog Albert von Preussen ist datirt Wittebergæ Anno 1553. Calendis Februarii.

In der Vorrede sagt der Verf.: Non dubito et doctos nec malos viros admiraturos esse, cur post clariss. virum Joh. Regiomontanum — ausim ego tabulas directionum in lucem emittere; und führt als Beweggrund dazu unter andern an: Deinde manifestum est, tabulas seu canones generales Regiomontani esse pertenues, ac propterea usum earum satis difficilem & operosum — Quare — generales canones exhibeo longe uberiores — inter quos præcipuus est Fœcundus, cui merito secundas tribuimus, cum tabulæ sinuum primæ debeantur.

Unter den den Tafeln vorausgeschikten Præceptis ist das 8te überschrieben: Qua ratione conditus sit fœcundus canon, & condendus integer canon doctrinæ triangulorum; und gibt folgende Auskunft über den ersten Punkt: Etsi otio-

montans Sinustafel für den nämlichen Halbmesser, fol. 114-132. Georg Joachim Rhäticus hat erstlich die

sum & supervacaneum videri potest rationem tradere condendi canonis, qui jam nostro non parvo labore tibi, opt. lector, ad singula totius quadrantis scrupula exhibetur; tamen quia in hoc opere passim non usum modo nostrorum canonum docemus, verum etiam quorundam constructionem, nihil hac etiam re alienum facimus ab instituto — Accedit deinde et hæc maxima utilitas, quod hujus rei scientia fontes etiam simul aperit sequentis præcepti 9. (S. §. 69. Note c.) quod insignem usum hujus fœcundi canonis exponet. Sit igitur orthogonium triangulum ABC (Fig. 22.), cujus angulus ad A rectus — Instituas duos numerorum contiguos ordines per totum circuli quadrantem propagatos, quorum alter exhibeat angulum C crescentem ab initio quadrantis ad finem ejus, alter vero angulum B paulatim rursus decrescentem sive a fine ejus redeuntem ad principium. Numeri vero ita sint ex ovvoiac collocati, ut cuique angulo C suus respondeat angulus B tanquam recti complementum. Postea singulis arcubus ex canone sinuum sui adscribuntur sinus — Hoc pacto habebis trium laterum orthogonii trianguli inter se rationes per integrum circuli quadrantem: ita scilicet ut, quocunque modo acuti in eo anguli varientur, in iisdem tamen particulis dentur latera circa rectum, quibus particulis subtendens rectum datur 10000000, quæ juxta nostrum canonem integrum sinum absolvunt — Verum alia res est in hoc fœcundo canone, qui eundem perpetuo numerum attribuit non lateri rectum subtendenti, sicut canon sinuum, sed uni laterum circa rectum; eo quod ex hac hypothesi, data tantum ratione laterum circa rectum, ambo etiam acuti anguli miro compendio sese offerant, vel absque notitia tertii lateris, quod tertio subtenditur. Adsumitur autem ille perpetuus numerus ad imitationem totius sinus in iisdem particulis 10000000, ut multiplicationis & divisionis munus in hujus generis calculo facillime sineque omni animi intentione administretur. Jam vel ex his, quæ commemorata sunt hactenus, satis adparet ratio compositionis. Cum enim ex canone sinuum ratio detur lateris CA ad AB, utcunque anguli B et C varientur; dabitur per 19. septimi Elem. latus etiam AB in iisdem particulis, quibus CA semper adsumitur 10000000. Si enim numeros AB singulos multiplices in adsumptum numerum, quod fit, si 7 thecæ singulis illis adjiciantur; productum autem porro dividas

Tangenten, wie die Sinus (§. 16.), von zehn zu Secunden für den Halbmesser 10 000 000 000; und noch durch alle Minuten, und für Decaden von Secunden durch die beyden ersten Grade, für den Halbmesser 1 000 000 000 000 000 berechnet (f).

§. 63.

Unter Tangente eines Winkels, wie ACB (*Fig.* 25.), versteht man also ein auf desselben einem Schenkel CA in dem Endpunkt G des beliebig auf eben diesem Schenkel von dem Scheitelpunkt C an abgeschnittenen Halbmessers CG errichtetes und bis an des Winkels andern Schenkel CB verlängertes Perpendikel. Und es hat mit den Tangenten der Winkel dieselbe Beschaffenheit wie mit den Sinus (§. 11.). Der Ausdruk, Tangente eines Winkels, schließt nämlich ebenso wenig, als der Ausdruk, Sinus, den Begrif einer gewisen bestimmten Länge in sich. Sondern wegen der ähnlichen Dreyeke CGH, Cgh (VI, 4.) verhält sich GH : gh = CG : Cg, und verwechselt GH : CG = gh : Cg: d. h. verschiedene Tangenten desselben Winkels verhalten sich wie die Halbmesser, zu welchen sie gehören; und für einen und denselben Winkel hat jede Tangente zu ihrem Halbmesser einerley Verhältniß; GH das nämliche zu CG, wie gh zu Cg.

Ueberdiß weil sowohl GH : gh = CG : Cg
als GM : gm = CG : Cg

ist auch GH : gh = GM : gm (V, 11.)
und verwechselt GH : GM = gh : gm (V, 16.)

in congruentem numerum CA: invenies numerum reponendum in eum locum areæ fœcundi canonis, qui locus debetur arcui angulum ad C determinanti — Vgl. §. 67.

Die auf Titel erwähnte Tabula umbrarum besteht aus einem Canon umbrarum meridianarum (solstitialium, æquinoctialium, brumalium) per singulos gradus latitudinis (fol. 233. sq.); und einem Canon umbrarum ad singulos gradus altitudinis solis (fol. 235); die Längen der Schatten in Theilen, qualium gnomon so wohl 10 000 000, als 60.

(f) Erstere stehen in dem in der Note i zu §. 16. angezeigten Magnus canon doctrinæ triangulorum. Leztere, welche Pitiscus nach Othos Tode unter des Rhäticus Papieren gefunden hat (§. 16. Note k.), sind ungedrukt geblieben (Kästners Gesch d. Math. I. B, 613, 615. f.).

d. h. die zu irgend einerley Halbmesser CG gehörigen Tangenten zweyer Winkel ACB, ACN verhalten sich wie die Tangenten derselben Winkel für jeden andern nämlichen Halbmesser Cg.

Und diese beständigen Verhältnisse der Tangenten zum Halbmesser, und unter sich, geben die in den Tangententafeln befindlichen Zahlen an; auf eine ähnliche Art und zu einem ähnlichen Zwek, wie nach §. 16. die Sinustafeln.

§. 64.

Dem bisherigen zufolge sind in dem §. 61. vorgegebenen rechtwinklichten Dreyek ABC (*Fg.* 22. 23. 24.) unmittelbar

AB : AC = sin. tot. : Tg. ABC oder Cotg. ACB
oder AC : AB = sin. tot. : Tg. ACB oder Cotg. ABC.

Da nämlich die Winkel ABC, ACB zusammen einen rechten machen (I, 32.), oder der eine des andern Complement (Ergänzung) zu einem rechten ist (§. 31.): so heißt auch die Tangente des einen die Tangente des Complements des andern; welches abgekürzt Co. tang oder Cotg geschrieben, und gelesen wird Cotangens oder Cotangente: so daß von den Cotangenten der spizen Winkel ebendas gilt, was von ihren Cosinus §. 31. bemerkt worden ist.

§. 65.

Die Cotangente eines spizen Winkels ACM (*Fig.* 35.) darzustellen, dient folgende Construction.

In C ziehe man CB senkrecht auf CA; beschreibe aus C als Mittelpunkt mit einem beliebigen Halbmesser CA, den Quadranten BMA; und errichte auf den Halbmessern CA, CB in ihren Endpunkten A, B Perpendikel, welche dem andern Schenkel CM des Winkels ACM in den Punkten T, R begegnen. So ist

der Winkel BCM das Complement des Winkels ACM;
AT die Tangente des Winkels ACM
BR die Tangente des Winkels BCM
oder die Cotangente von ACM
} für den Halbmesser CA (§. 63. f.)

In den zufolge der Construction und El. I, 29. gleichwinklichten Dreyecken CAT, CBR ist nun (VI, 4.)

$$AT : CA = CB : BR$$

d. h. Tg. ACM : sin. tot. = sin. tot. : Cotg. ACM
oder sin. tot. : Tg. ACM = Cotg. ACM : sin. tot.

Tangente und Cotangente eines spizen Winkels hängen demnach so von einander ab, daß die eine zum Sinus totus sich verhält, wie der Sinus totus zur andern; oder daß von den zwey Verhältnissen der Tangente und Cotangente desselben Winkels zum Sinus totus das eine das umgekehrte des andern ist. Dieß erläutert auch die gegenseitige Beziehung der zwey Proportionen §. 64.

§. 66.

Ebenso ist BCN das Complement des spizen Winkels ACN; seine Tangente AS; Cotangente BU; und

$$AS : CA = CB : BU$$

oder umgekehrt $CA : AS = BU : CB$
folglich, weil $AT : CA = CB : BR$ (§. 65.)
ex æquo $AT : AS = BU : BR$ (V, 22.)
d. i. Tg. ACM : Tg. ACN = Cotg. ACN : Cotg. ACM.

Die zu irgend einerley Halbmesser gehörigen Tangenten zweyer spizen Winkel verhalten sich also umgekehrt wie die auf denselben, oder (§. 63.) auf irgend einerley andern Halbmesser bezogenen Cotangenten dieser Winkel.

§. 67.

Fällt man aus dem Punkt M die Perpendikel MP, MQ auf die Halbmesser CA, CB: so sind

MP = CQ, der Sinus } des Winkels ACM für den
MQ = CP, der Cosinus } Halbmesser CA (§§. 11. 31.);

und (VI, 4.) $CP : PM = CA : AT$
$CQ : QM = CB : BR$

d. i. Cosin. ACM : sin. ACM = sin. tot. : Tg. ACM
sin. ACM : Cosin. ACM = sin. tot. : Cotg. ACM

daher Tang. ACM $= \frac{\text{sin. tot. sin. ACM}}{\text{Cosin. ACM}}$

Cotg. ACM $= \frac{\text{sin. tot. Cosin. ACM}}{\text{sin. ACM}}$

Für irgend einerley Halbmesser oder Sinus totus verhält sich also der Cosinus eines spizen Winkels zu seinem Sinus, wie der Sinus totus zu seiner Tangente, oder wie seine Cotangente zum Sinus totus: und die Tangente eines spizen Winkels ist gleich dem Produkt aus dem Sinus in den Sinus totus, dividirt durch den Cosinus; die Cotangente aber, dem Produkt aus dem Sinus totus in den Cosinus dividirt durch den Sinus. (Vgl. §. 62. Note e.). Woraus sich die Art ergibt, die Tangenten und Cotangenten der spizen Winkel aus ihren Sinus und Cosinus, so wie auch die Logarithmen jener aus den Logarithmen dieser, für den nämlichen Halbmesser wie die Sinus und Cosinus, herzuleiten.

§. 68.

Wenn man die Winkel B, C (*Fig.* 22) durch eine der zwey Proportionen (§. 64.) bestimmt hat: so kann man umgekehrt die dritte Seite BC des Dreyeks mittelst einer der zwey Proportionen (§. 61.).

$\left.\begin{matrix}\text{sin. B}\\ \text{sin. C}\end{matrix}\right\} : \text{sin. tot.} = \left\{\begin{matrix}\text{AC}\\ \text{AB}\end{matrix}\right\} : \text{BC}$ berechnen;

wobey man, wenn man es für dienlich hält, die Quadratwurzel-Ausziehung vermeidet, welche die Berechnungsart (§. 61.) erfordert.

§. 69.

In den §. 62. gebrauchten ähnlichen Dreyeken BAC und BDF (*Fig.* 23.), CAB und CGH (*Fig.* 24.) sind noch

$$\text{BD} : \text{BF} = \text{AB} : \text{BC},$$
$$\text{CG} : \text{CH} = \text{AC} : \text{BC}.$$

BF, CH sind von den Scheitelpunkten der Winkel B, C bis an ihre Tangenten DF, GH reichende Abschnitte ihrer

Schenkel BC, welche die aus den Mittelpunkten B, C mit den auf ihren andern Schenkel BA, CA willkührlich angenommenen Halbmesser BD, CG beschriebene Kreisbogen in E, J schneiden: und heissen daher die zu diesen Halbmessern gehörige Secanten der Winkel B, C; oder die Cosecanten (a) der Winkel ACB, ABC, nämlich die Secanten ihrer (Complemente) Ergänzungen zu einem rechten Winkel (Vergl. §. 31. 65.). Wonach obige Proportionen so lauten:

sin. tot.: sec. B oder Cosec. ACB = AB: BC (*Fig.* 23.),

sin. tot.: sec. C oder Cosec. ABC = AC: BC (*Fig.* 24.),

Die Berechnung von BC in Zahlen, wie sie vor der Erfindung und dem Gebrauch der Logarithmen geschehen muste, endiget sich nach diesen Proportionen mit der einfachen Division durch Sinus totus; statt der unbequemen durch sin. B oder sin. C, welche die Proportionen §. 68. erfordern. So wurde man veranlaßt noch die Secanten der Winkel, oder der sie messenden Bogen, den trigonometrischen Tafeln beyzufügen (b).

(a) In Bonaventuræ Cavalerii Trigonometria plana et sphærica — (Bonon. 1643. 4°. p. 2.) heissen Cotangenten und Cosecanten Tangentes secundæ, Secantes secundæ; so wie Cosinus, Sinus secundi. Vgl. die Note zu §. 43.

(b) Schon Regiomontanus verwandelte zur Erleichterung der Berechnung der Zeiten einiger seiner Beobachtungen von den Jahren 1460. 1461. 1462. das mehreremal dabey vorkommende Verhältniß des Cosinus der geographischen Breite des Beobachtungs-Orts zu dem Sinus totus (den er noch = 60 0000 annahme) in ein anderes, dessen Vorderglied 100 000; um nach geschehener Multiplication mit dessen Hinterglied, (welches er Multiplicator perpetuus ad locum observationis nannte, und das nach der jetzigen Benennungsart die Secante der geographischen Breite des Orts war) die erforderliche Division blos durch Abschneiden der lezten fünf Ziffern des Products zu verrichten. (Joannis de Monte regio, Georgii Peurbachii, Bernardi Walteri, ac aliorum, Eclipsium, Cometarum, Planetarum ac Fixarum observationes, in der §. 16. Note d. angeführten Sammlung: Scripta clariss. Mathematici M. Jo. Regiomontani de Torqueto — Norimb. 1544. fol. 38. und 39. b. sqq.) Dieses Verfahren findet sich hingegen fol. 36. b. sq. bey der Berechnung einer Beobachtung von dem J. 1457. noch nicht angewendet.

Dieß ist zuerst von dem schon mehreremal genannten Georg Joachim Rhäticus geschehen, welcher eine Tafel derselben unter dem Namen Canon hypotenusarum für den Halbmesser 10000000, auf einzelne Minuten, nach dem Jahr 1539. berechnet, und vor dem Jahr 1553. herausgegeben hat (c). Franciscus Maurolycus ließ

(c) Die diesen Canon enthaltende Schrift des Rhäticus hab ich weder gesehen, noch selbst ihren Titel, Drukort, und Datum der Ausgabe irgendwo angezeigt gefunden. Ihr Daseyn und Herausgabe vor dem Jahr 1553. beweisen aber folgende Nachrichten.

Rheinhold fügt dem in der Note d zu §. 62. angeführten in Beziehung auf den zweyten Theil seines 5ten Præcepti bey: Reliquum est, ut studiosus lector paucis hic etiam admoneatur, quid addendum sit huic fœcundo canoni, ut nihil ei desit, quin una cum sinuum canone ad omnem usum universæ trigonometriæ tum planorum, tum sphæricorum, sit accommodatus. Nam sinuum quidem canon, quomodocunque etiam duo anguli pares uni recto inter se varientur, semper tamen, ut dictum est, trium inter se laterum orthogonii trianguli rationes exhibet, ita ut latus recto subtensum unum eundemque numerum constanter servet, ut particularum 10000000. At fœcundus canon non exhibet omnium trium laterum inter se rationes, sed duorum tantum, quæ sunt circa rectum, quorum alterum adsumit similiter esse particularum 10000000. Quare ut fiat jam integer canon doctrinæ triangulorum, addendum est tertium latus, recto subtensum, in iisdem particulis adsumti numeri. Id autem hoc modo efficies, si eundem adsumptum numerum 10000000 in sese multiplicatum dividas in singulos sinus totius quadrantis, redeundo a fine ad ejus principium [Vgl. §. 72.] — Unum tamen adhuc monendus est studiosus lector, quod integer canon doctrinæ triangulorum tripartitus sit. Aut enim latus recto subtensum adsumitur particularum 10000000, aut majus latus circa rectum, aut minus circa eundem. Prima hujus canonis pars contexitur ex canone sinuum, quæ ultra 45. gradus non adsurgit, eo quod duo acuti anguli uni recto æquales sunt. Hinc enim fieri necesse est, ut, quanto unus eorum minor fuerit 45 gradibus, tanto vicissim alter major existat; fitque post semissem quadrantis magnitudinis acutorum angulorum permutatio. Reliquas autem duas partes suppeditat noster canon fœcundus absolutus, quæ similiter ut pri-

1558. zu Messina eine Secantentafel unter dem Titel: Tama pars desinunt in 45 gradum. Ideo autem canon sinuum unam tantum partem suppeditat, fœcundus autem duas, quia ille lateri rectum subtendenti perpetuo tribuit particulas 10000000, hic vero totidem particulas tribuit alias majori lateri circa rectum, alias minori: id quod prolixius declarare nihil attinet, præsertim cum jam in promtu sit hic canon, editus a summo artifice Joachimo Rhetico, qui si usum ejus præceptis illustraverit, ut spem fecit, magnum in mathematicis nomen habebit ad posteritatem. Und in dem 9ten Præceptum, das überschrieben ist: In triangulo rectilineo datis duobus lateribus circa rectum datur uterque acutorum angulorum, itemque latus recto subtensum; lehrt Reinhold erstlich des bey A rechtwinklichten Dreyecks ABC (Fig. 22.) spize Winkel C, B aus den gegebenen Seiten CA, AB, mittelst des Canonis fœcundi, alsdenn die Hypotenuse BC mittelst des Canonis sinuum, wie in §. 64. 68. finden; worauf er hinzusezt: Itaque alia jam ratione nobis inventum est latus recto subtensum, quam supra docuimus ex penultima primi Euclidis. Verum aliam insuper rationem suppeditat integer canon doctrinæ triangulorum, quam nunc volens omitto.

Otho erzählt in der Vorrede des in der Note i zu §. 16. angeführten Operis Palatini de triangulis (fol. b 2. sqq.): Vidit idem [Joannes de Regiomonte] maximum fore compendium, si [Fig. 9.] ratio EF semissis ad CF haberetur non tantum in partibus, qualium CE ex centro ducta poneretur part. 10000000; sed etiam in partibus, quarum sive EF sive CF poneretur part. 10000000, et pro ea ratione altera semissium constitueretur. Quare hac ratione Tabulam, quam fœcundam appellavit, confecit. Sed neque sic tractatio doctrinæ triangulorum absoluta fuit. Nam quia ad triquetri latera, & non subtensas respicitur; requirebatur, ut, data recta EF vel CF in proportione, quarum altera earum poneretur part. 10000000, iisdem in partibus & subtendens angulum rectum, h. e. hypotenusa, daretur. Id cum Georgius Joachimus Rheticus animadvertisset, rationem inire cœpit, quomodo hanc doctrinam locupletare & pleniorem efficere posset. Dum hoc mente & animo suo agitat, fama de Copernici admirandis hypothesibus percrebescit. Rheticus, quanquam tunc Professorem ageret mathematum in florentissima Academia Vitebergensi, tamen teneri non potuit, quin tantum virum primo quoque tempore adiret. Profectus

bella benefica, einer Tabellae sinus recti und fœcundae

igitur ad Copernicum [A. 1539. S. §. 62. Note h.], cum coram de hypothesibus cognovisset, renunciata professione apud eum mansit. Copernicus tunc in Opere suo Revolutionum occupabatur: jamque doctrinam secundorum mobilium, ut vocant, absolverat; ut præter primi mobilis doctrinam nihil restaret amplius. — Rheticohac occasione non tantum de globi sectoribus & triquetris pyramidum basibus in mentem venit: sed idem deprehendit etiam, triquetrum cum recto, totius matheseos magistrum, omnium rectissime rationem condendi canonis perfectam suppeditare posse. Hanc igitur occasionem amplificandi doctrinam triangulorum nactus, magno animo magnoque conatu rem aggressus est. Ac primum, quia nova ratio novam requirebat loquendi formam, Saracenica missa, propriam & accommodatam suis rationibus adhibuit. Quod igitur illi sinum rectum & sinum primum dixerunt, id Rheticus nominavit perpendiculum tam arcus, quam anguli: quod iidem sinum secundum, vel sinum complementi ad quadrantem; idem ejus arcus & anguli basin; quod illi sinum versum & sagittam; hic minus segmentum diametri in proportione. — Hujus suæ rationis locupletandi canonem & doctrinam triangulorum specimen cum in publicum dedisset D. Rheticus, miram de se doctissimorum hominum & spem & exspectationem concitavit; præsertim cum in Dialogo, quem Canoni ad partes & decades scrupulorum confecto præmisit, mira & propemodum incredibilia de usu & utilitate canonis doctrinæ triangulorum offerret.

Fink sagt in seiner 1583. (also 13 Jahr früher als das Opus Palatinum und Magnus Canon Rhætici) herausgegebenen Geometria rotundi (Note zu §. 43.) p. 74: Rheticus in tabula a se edita & triangulorum canone non tantum rectam AT (Fig. 35.), sed et sinum, modo basin trianguli, modo cathetum & perpendiculum, opositi anguli ratione vocat; ferner p. 76: Joachimus Rheticus hypotenusam — vocat [rectam CT]; und setzt seinen Tafeln der Sinus, Tangenten und Secanten die Titel vor: Canon sinuum, Rhetico Canon basis & perpendicularis primus; Canon tangentium, vulgo canon fœcundus, Rhetico Canon basis & perpendicularis secundus; Canon secantium, Rhetico Canon hypotenusarum. Vgl. die folgende Note c.

Lansberg in seiner Triangulorum geometria, 1591.

beygefügt, drukeu (d). Nachher hat Rhäticus die Secanten, wie die Tangenten (§. 62.), sowohl von zehn zu zehn Secunden für den Halbmesser 10000000000; als durch alle Minuten und für Decaden von Secunden durch die ersten zwey Grade, für den Halbmesser 1000000000000000 berechnet (e).

(Note zu §. 43.) betitelt diese Tafeln Canon sinuum, vel semissium rectarum in circulo subtensarum; Canon tangentium, Erasmo Rheinholdo Canon fœcundus; Canon secantium, Rhetico Canon hypotenusarum; und sagt p. 17. §. 13.: Atque hæc quidem est methodus constructionis canonis sinuum, tangentium et secantium; in qua tamen sponte a nobis omissa sunt compendia superioris Libri theorematibus 9. 21. & 22. demonstrata. Nam cum integer triangulorum canon ad manum esset, sinuum quidem a præstantissimo mathematico Joanne Regiomontano, tangentium ab Erasmo Rheinholdo, secantium vero ab Joachimo Rhetico compositus; latius ista persequi supervacuum duximus.

(d) Siehe Note d. zu §. 8. Fink (Geometria rotundi p. 76.) behauptet: Maurolycus canonem Rhetici paulo mutatum in Messanensi Menelai editione, nomine etiam mutato, edidit, & beneficum vocavit.

(e) Von diesen sind auch nur die ersten in Rhætici Magnus canon gedrukt worden. S. Note f. zu §. 62.

Nach Othos Bericht in der Vorrede des Operis Palatini scheint Rhäticus seinen grossen Canon hypotenusarum unvollendet hinterlassen, und Otho nach seinem Tode das noch fehlende ergänzt zu haben. Dieser meldet nämlich, nach dem in der Note b. angeführten, von des Rhäticus weiteren Bemühungen zur Vervollkommnung des trigonometrischen Canon folgendes: Post etsi quidem adhuc aliquandiu tabulis Copernici & Regiomontani fuerit usus, tamen earum defectum supplevit. Quin & tertiam seriem canonis secundum rationem a se inventam non tantum ad partes & singula scrupula, sed etiam ad decades scrupulorum secundorum confecit; magis ut privato usui serviret, quam ut aliquando in publicum mitterettur. In usu tamen hujus & illius cum animadvertisset, hypotenusas secundæ & tertiæ seriei, itemque perpendiculum illius & basin hujus, non usque adeo exacte numeris primæ seriei respondere, si primæ se-

§. 70.

Mit den Secanten der Winkel oder Bogen hat es über-

riei hypotenusa haberet tantum partes 10000000; posuit eam partium 10000000000, & secundum hanc rationem non tantum latera includentia rectum primæ seriei exquisivit, sed & secundæ atque tertiæ hypotenusas, & alterius earum basin, alterius vero perpendiculum in partibus iisdem. Verum neque in his sibi subsistendum existimavit. Nam quia canonem illum a se locupletatum & adauctum omnibus suis numeris absolutum & perfectum esse voluit, — omnimoda præcisione opus esse judicavit: atque ideo eam, quæ ex centro, partium 1000000000000000 constituit; et secundum hujus ad latera includentia rectum rationem numeros primæ seriei, atque inde reliquarum duarum serierum exquisivit — Sed neque in hac, quamvis satis exquisita ratione acquiescere potuit. Deprehendit observando aliquoties, non tam instrumenta, quibus observationes capiuntur, quam tabulas fallere, ex quibus numeri desumuntur — Misso igitur canone, de quo modo facta est mentio, novum alium canonem non ad partes & scrupula tantum, sed & decades secundorum aggressus est condere, posito fundamentali numero, vel ea, quæ ex centro, part. 10000000000. In hoc conficiendo dum fuit occupatus, non facile dici aut credi potest, quantum temporis, laboris ac sumtuum impenderit. Quicquid enim undecunque habuit, id omne huc contulit, ut canon iste, quam posset celerrime, absolveretur — Cum in Academia Vitebergensi, in qua semper maxime floruerunt studia mathematica, versarer; satis mature animadverti quod ad ea, de quibus in principio [Præfationis] dictum est, [de cœlestium corporum motibus doctrinam, meteorologiam, gnomonicam, geographiam, opticam] sine cognitione doctrinæ triangulorum nullus pateret aditus. Quare rationem inire cœpi, unde eam quam commodissime possem haurire. Erant in promtu Ptolemaica, erant etiam Copernicea. Sed tam hæc, quam illa aditu prohibebant, nisi aliquid aliunde afferres. Erant item libri Joannis Regiomontani. Qui etsi mihi prolixiores videbantur, quam ut intra mediocre temporis spatium me expedire possem, tamen hos adire et consulere statui — Jamque aliquo progressus eram, cum forte fortuna in Dialogum Rhetici, quem Canoni adjunxit, inciderem. Hunc semel atque iterum percurrens video, eum mira & co-

haupt die nämliche Beſchaffenheit wie mit ihren Sinus und Tangenten (§. 11. 63.).

gnitu dignissimma promittere. Quid multa, ego his excitor et incendor, ut temperare mihi non possim, quin primo quoque tempore ipsum autorem adeam, & coram de singulis cognoscam. Profectus itaque in Ungariam, ubi tum agebat Rheticus, humanissime ab eo sum exceptus. Vix autem pauco sermone ultro citroque habito, cum meæ ad se profectionis causam accepisset, in has voces erupit: profecto, inquit, in eadem ætate ad me venis, qua ego ad Copernicum veni. Nisi ego illum adiissem, opus ipsius omnino lucem non vidisset. Cessavi hactenus, necdum doctrinam triangulorum globi sine angulo recto attigi: nuper enim logistæ mei ad tertiam seriem accesserunt. Quæ etsi quidem me nonnihil remorabitur, tamen quia te & convictorem & socium laborum habiturus sum, ad pertexendam reliquam doctrinam me accingam. Interea te lectitandis nostris oblectabis — Jamque tempus aderat, ut ad rem veniremus. Quare ille se ad explicationem duorum capitum 16 & 17 Mahometi Aratensis confert — Dum igitur ille in horum capitum explicatione versatur, ego in lectitandis iis, quæ jam perfecta atque absoluta erant, occupor — Accidit autem, ut, cum susceptæ explicationis finem fere attigisset, primæ ac secundæ seriei rum canonis doctrinæ triangulorum, quas Cracovia discedens reliquerat, usus requireretur. Has cum non cuivis committendas censeret, mea opera in asportandis iis usus est — Ille interim cum a Barone quodam evocatus cubuisset in conclavi recens incrustato, catharro infestari cœpit: quo adhuc vexabatur, cum redirem Cracovia. Vix autem triduum una fuimus, cum iterum a magnifico ac generoso Domino Joan. Rubero summæ rei præfecto in Ungaria evocaretur. Morbo autem Cassoviæ indies propter cœli gravitatem ingravescente, cum — mortem ipsam sibi imminere sentiret — missis ad Dom. Ruberum amicis petiit, ut, simul ac decessisset, mihi opus ipsius, quod imperfectum relinqueret, traderetur. — In hanc ipsius petitionem cum Dom. Ruberus consensisset, quatriduo post carissimus præceptor — in complexu meo exspiravit — Tradidit ergo mihi Dom. Ruberus non tantum opus, ut voluit Rheticus præceptor; sed idem etiam diplomate testatus est, jussu ac mandato Imperatoris Maximiliani II. me id accepisse [Vgl. §. 16. Note h.] Inde cum de sumtibus necessariis constitutum esset, ad tertiæ seriei continuatio-

Die Secante eines Winkels für einen gegebenen auf des Winkels einem Schenkel abgeschnittenen Halbmesser, oder in einem gegebenen aus des Winkels Scheitelpunkt beschriebenen Kreise, ist (§. 69.) das Stük des andern Schenkels des Winkels, welches zwischen des Winkels Scheitelpunkt und dem Endpunkt der zu eben demselben Halbmesser gehörigen Tangente des Winkels liegt. So sind (*Fig.* 25.) $\left.\begin{matrix}CH,\ CM\\ Ch,\ Cm\end{matrix}\right\}$ der Winkel ACB, ACN Secanten für die Halbmesser $\left\{\begin{matrix}CG\\ Cg\end{matrix}\right.$.

Nun ist (VI, 2.) $CH:Ch = CG:Cg$
und verwechselt $CH:CG = Ch:Cg$.

Verschiedene Secanten eines Winkels verhalten sich also wie die Halbmesser, zu welchen sie gehören: und für den nämlichen Winkel hat jede Secante desselben einerley Verhältniß zu ihrem Halbmesser.

Ferner da sowohl $\left.\begin{matrix}CH:Ch\\ CM:Cm\end{matrix}\right\} = CG:Cg:$
als
so ist auch $CH:Ch = CM:Cm$
und verwechselt $CH:CM = Ch:Cm$;
d. h. die zu einerley Halbmesser CG gehörigen Secanten zweyer Winkel ACB, ACN verhalten sich wie eben dieser Winkel Secanten für irgend einen andern Halbmesser.

Und diese beständigen Verhältnisse der Secanten zu dem Halbmesser oder Sinus totus, und unter einander, sind es wieder, welche die in den Secantentafeln enthaltene Zahlen angeben. (§. 16. 63.)

§. 71.

In den durchaus für einerley Halbmesser oder Sinus totus berechneten Sinus, Tangenten und Secanten-Tafeln (a)

nem accessi — Von dem Werk selbst De triangulis hat Otho den Theil De triangulis globi sine angulo recto ausgearbeitet.

(a) Auf die §. 69. erwähnte von Rhäticus und Maurolycus

ſcheint zunächſt gefolgt zu ſeyn der von Franciſcus Vieta (geb. zu Fontenai in Poitou um das J. 1540, geſt. zu Paris im Decemb. 1603.) im Jahr 1579. zu Paris in fol. herausgegebene, auf einzelne Minuten ausgedehnte, und zwar auf den Halbmeſſer 100000 beſchränkte, aber für den Halbmeſſer 100000000 nach eigenen Methoden von ihm berechnete Canon mathematicus, seu ad triangula; cum appendicibus, und mit einem zweyten, Universalium inspectionum ad canonem mathematicum liber singularis betitelten Theil (Montucla T. I. p. 607. 610. sq. Hutton p. 4. sqq. Murhard Biblioth. math. Vol. II. p. 181. sq.). Vieta (Opera mathematica. Lugd. Bat. 1646. p. 323. 371.) nennt denſelben infeliciter editum. Montucla berichtet (p. 610.): Il nous reste à parler d'un ouvrage de Viete, qui lui causa quelque chagrin; c'est son Canon mathematicus — imprimé en 1579. & devenu excessivement rare, parceque Viete mecontent des fautes d'impression qui s'y etoient glissées, en retira tous les exemplaires qu'il put recouvrer. Je n'en ai en effet jamais vu que deux, celui de la bibliotheque ci-devant du roi, & celui qui fut vendu lors de la vente de la bibliotheque de Soubise, que je voulois avoir. Mais un curieux le poussa si haut, que je l'abandonnai. Und Hutton ſagt (p. 7.): The copies of this book are so rare, that i never saw one besides that which is in my own possession, nor ever met with any other person at all acquainted with such a book. Vieta war geſonnen, eine neue Ausgabe deſſelben zu veranſtalten (Opp. p. 323. 371. 400.); welche aber nicht zu Stande gekommen iſt. Folgende Beſchreibung, die er (in ſeiner Variorum de rebus mathematicis responsorum Liber VIII. betitelten Schrift, Cap. XIX. Opp. p. 415. sqq.) unter der Aufſchrift Canonis mathematici hypotyposis von ſeiner Einrichtung giebt, ſtimmt mit derjenigen überein, welche Montucla und Hutton von der Anordnung des gedrukten Canon machen: Ex angulis latera, vel ex lateribus angulos, & mixtim, in triangulis tam planis quam sphæricis adsequi, summa gloria mathematici est. Sic enim cœlum & terras & maria felici & admirando calculo mensurat. Itaque ad eum finem paratur canon mathematicus, quo exhibentur latera trianguli plani rectanguli, æstimata in numeris serie trina in habitudine anguli acuti ad rectum quacunque. Deinde docet ars obliquangulorum ad rectangula, & sphæricorum ad plana reductionem Latera trianguli plani rectanguli vocantur hypotenusa, perpendiculum, basis. Hypotenusa dicitur latus subtensum angulo recto, reliquis famosiori: perpendiculum

unum e lateribus circa rectum; basis alterum. E duobus angulis acutis trianguli plani rectanguli unus acuti nomen retinet; alter dicitur reliquus e recto. Is autem angulus acutus intelligitur, cui latus perpendiculi voce designatum subtenditur; reliquus e recto, cui basis. Et vice versa, latus ei angulo, qui acuti voce primus exauditur, subtensum perpendiculum denominatur; latus subtensum reliquo e recto, basis — Anguli acuti, vel sui exterioris amplitudo est peripheria: differentia autem inter eam & amplitudinem anguli recti dicitur complementum, seu residua. Semidiameter canonica datur ex se, & constituitur particularum 100 000: latera trianguli reliqua in unaquaque serie taxantur in iisdem, per quæcunque scrupula quadrantis circuli congruenter. Itaque absolvitur totus mathematicus canon ter similibus planis triangulis rectangulis 2700, quot videlicet scrupulis constat dimidius angulus rectus. A quo systemate deinceps convertuntur triangula: qui enim angulus dicebatur is, quem acutus relinquebat e recto, exinde nomen acuti adsumit; alter ipse nomen reliqui e recto. Atque ideo basis in perpendiculum transit, et vice versa perpendiculum in basin, ut sola opus sit vocum permutatione — Linearum rectarum ad circumferentias relatarum duæ apud geometras reperiuntur species, inscriptæ et circumscriptæ. Inscriptæ pertinent ad circumferentias ab iis subtensas; circumscriptæ ad peripherias ab eductis e centro ad earum extrema interceptas. Sive autem inscriptas, sive circumscriptas cadens ad angulos rectos semidiameter bifariam secat, cum videlicet circumscriptio fit ordinati polygoni. Itaque in accommodatione trianguli plani ad circulum, serie prima perpendiculum fit semissis inscriptæ duplo peripheriæ, ejus videlicet, quæ anguli acuti vel sui exterioris amplitudinem definit; basis, semissis inscriptæ duplo reliqui e recto, seu complementi; hypotenusa, semidiameter. In serie secunda perpendiculum fit semissis circumscriptæ duplo peripheriæ; basis, semidiameter; hypotenusa, educta e centro ad metam semissis circumscriptæ duplo peripheriæ. In serie tertia perpendiculum fit semidiameter; basis, semissis circumscriptæ duplo complementi; hypotenusa, educta e centro ad metam semissis circumscriptæ duplo complementi — Arabes autem semisses inscriptas duplo, numeris præsertim æstimatas, vocaverunt allegorice sinus; atque adeo ipsam semidiametrum, quæ maxima est semissium inscriptarum, sinum totum. Et de iis sua methodo canones exaraverunt, qui circumferuntur; supputante præsertim Re-

giomontano bene juste & accurate, in iis etiam particulis, qualium semidiameter adsumitur 10 000 000. Ex canonibus deinde sinuum derivaverunt recentiores canonem semissium circumscriptarum, quem dixere fæcundum; & canonem eductarum e centro, quem dixere fæcundissimum & beneficum, hypotenusis addictum. Atque adeo semisses circumscriptas, numeris præsertim æstimatas, vocaverunt fæcundos sinus numerosve videlicet; quanquam nihil vetat fæcundi nomen substantive accipi: hypotenusas autem, beneficas, vel etiam simpliciter hypotenusas; quonam hypotenusa in prima serie sinus totius nomen retinet. Itaque ne novitate verborum res adumbretur, & alioqui sua artificibus eo nomine debita præripiatur gloria; præposita in Canone mathematico canonicis numeris inscriptio candide admonet: primam seriem esse canonem sinuum; in secunda vero partem canonis fæcundi, partem canonis fæcundissimi contineri; in tertia, reliquam. Diese Beschreibung hat die größte Aehnlichkeit mit der, welche Reinhold (§. 62. Note d, und §. 69. Note c.) von einem integer canon doctrinæ triangulorum und canon fæcundus absolutus, wie er sie nennt, macht; und von welcher zu vermuthen zu seyn scheint, daß sie demjenigen Canon angepaßt sey, den er als bereits durch des Rhäticus Bemühung vorhanden angiebt. Der von Otho 1596. herausgegebene Magnus canon Rhætici besteht auch aus drey abgesonderten Reihen mit den Ueberschriften Perpendiculum und Basis, Hypotenusa und Perpendiculum, Hypotenusa und Basis, die mit ihren Differenzen zwölf Columnen bilden, welche immer zwey neben einander liegende Seiten linker und rechter Hand des Lesers einnehmen: wobey die Winkel oder Bogen nach der Reihe von 0 bis 90 Grade fortgehen; nur unter der Seite rechter Hand die Zahl des Grades gesezt ist, welcher mit dem, dessen Zahl über der Seite linker Hand steht, den Quadranten ergänzt, und in schmalen Spalten linker und rechter Hand die Zahlen der Minuten und Secunden, links von oben herunter für den Grad, dessen Zahl oben steht, rechts von unten herauf für den, dessen Zahl unten steht, angegeben sind, um Bogen und Ergänzungen zusammen zu übersehen (Kästners Gesch. d. Math. I. B. S. 621. f.). Von Vietas Canon sagt hingegen Hutton (p. 4.): It contains all the sines, tangents and secants for every minute of the quadrant, to the radius 100 000, with all their differences; and towards the end of the quadrant the tangents and secants are extended to 8 or 9 places of figures. They are arranged like our tables at present, increasing on the left hand side to 45 degrees,

and then returning upwards by the right-hand to 90 degrees; so that each number and its complement stand together on the same line.

Unter den Appendicibus des Canon von Vieta befinden sich zwey Tafeln der Sinus, Tangenten und Secanten aller ganzen Grade: die eine für den Halbmesser 100 000 000; die andere, in Sechzigtheilen des Halbmessers bis auf Secunden (Hutton p. 6.)

Nach dieser ptolemäischen Eintheilung des Halbmessers durch alle Minuten berechnete Sinus, Tangenten und Secantentafeln, leztere unter der Benennung Canon adscriptarum & hypotenusarum, stehen in Mauricii Bressii, Gratianopolitani, Regii et Ramei mathematicarum Lutetiæ Professoris, Metrices astronomicæ Libri quatuor. Paris, 1581. fol. (Kästners geom. Abh. I. Samml. S. 552. f. Gesch. d. Math. I. B. S. 565. 626. ff.).

Fink 1583. Clavius 1586, Lausberg 1591 haben in ihre in der Anmerkung zu §. 43. angeführten Schriften Sinus, Tangenten und Secantentafeln für den Halbmesser 10 000 000, nach Regiomontanus, Reinhold und Rhäticus, jede besonders, durch einzelne Minuten von 0 bis 90 Grade fortlaufend, eingerükt. (Vgl. Note c zu §. 69.)

Der Herausgeber des in der Note k zu §. 16. angezeigten Thesaurus mathematicus, sive Canon sinuum — Bartholom. Pitiscus (geb. 1561. zu Schlaun unweit Grünberg in Schlesien; Friederichs IV. Kurfürsten von der Pfalz Lehrer, hernach Hofprediger; gest. 1613. nach Weidler p. 412.) hat seinen Trigonometriæ sive de dimensione triangulorum Libri quinque; item Problematum variorum — Libri decem, Trigonometriæ subjuncti ad usum ejus demonstrandum (4°. Francof. 1599. Augustæ Vindel. 1608. Francof. 1612.) einen Canon triangulorum emendatissimus & ad usum accommodatissimus beygefügt. (Kästners geom. Abh. I. Samml. S. 571. ff. Gesch. d. Math. I. B. S. 564. f. 583. ff.) Von der Einrichtung und Genauigkeit dieses Canon sagt er p. 35. der zweyten Ausgabe: Nos ad principia Canonis exquirendum assumsimus radium particularum

10 000 000 000 000 000 000 000 000.

In ipso vero Canone radium posuimus pro necessitate varium; sicut infra suo loco dicetur. Ferner p. 73. sqq.: Dispositio canonis aliis alia placet. Nobis visa est commodissima, quam vides: in qua sinus, tangentes & secantes arcuum semiquadrante minorum in facie sinistra; sinus vero, tangentes & secantes arcuum semiquadrante majorum in dextra facie canonis collocatæ sunt: ut, sive arcus se-

miquadrante minor sive major in quæstionem veniat, ejus complementum e regione statim sese offerat. Et sinus quidem, tangentes ac secantes arcuum semiquadrante minorum una cum arcubus suis crescunt descendendo; sinus vero, tangentes & secantes arcuum semiquadrante majorum una cum arcubus suis crescunt ascendendo, per singula scrupula prima: excepto primo gradu, ejusque complemento; ubi etiam scrupula secunda, vel singula (von 0° 0′ 1″ bis 60″, und von 89° 59′ 59″ bis 89° 59′), vel bina (von 0° 1′ 0″ bis 0° 9′ 60″, und von 89° 59′ bis 89° 50′), vel dena (von 0° 10′ 0″ bis 0° 60′, und von 89° 50′ bis 89°) adhibuimus: quia aliter calculus in scrupulis secundis infallibilis ibi haberi nequit. Loco differentiarum posuimus partem proportionalem vel singulorum, vel denorum secundorum; compendiosioris calculi gratia. Addidimus etiam incrementa, quibus partes proportionales inæquales vel per singula, vel per dena scrupula secunda crescerent; ad majorem præcisionem assequendam. Radium assumsimus pro necessitate varium: nempe vel quinque, vel septem, vel octo, vel novem, vel decem, vel undecim, vel duodecim notarum. Quam varietatem prudens logista facile conciliabit; semper tantæ magnitudinis radium ad calculum adhibendo, ad quantæ magnitudinis radium quilibet in canone numerus factus sit. Quod ut statim appareat; sinus, tangentes & secantes ad radium 100000 factos a ceteris, quam pro isto radio majoribus, puncto interjecto ubique discrevimus. Imo, ubi plusquam decem notarum est, etiam alterum punctum interjecimus; quo sinus, tangentes & secantes radii decem notarum a sinibus, tangentibus & secantibus majoribus e vestigio discerni dignoscique possint. Ubi nullum punctum apparet, ibi radius tantum est quinque notarum (100000); ut in omnibus tangentibus & secantibus postremorum quinque graduum. Und p. 70: Hoc modo per Canonem istum ad singula scrupula secunda absque omni errore in calculo trigonometrico pervenire poteris: & in primo quidem ac postremo gradu certius, quam per magnum Canonem Rhetici; in ceteris vero omnibus Canon Rhetici præstat. Nam & citius per illum operari; & non tantum scrupula secunda, verum etiam tertia & quarta ex illo infallibiliter colligere poteris. Itaque si sapies, & tantum æris habebis, istum Canonem omnino tibi comparabis. In einer kleinen, den Libri tres sphæricorum seines Landsmanns Abraham Scultetus angehängten Abhandlung De resolutione triangulorum (Heidelbergæ 1595. 8°.), welcher keine trigono-

metrische Tafeln beygefügt waren, verwiese Pitiscus auf Finkii Geometriam rotundi und Lansbergii Geometriam triangulorum; mit dem Beysaz: Emendatissime autem mox extabunt in magno Canone doctrinæ triangulorum Georg. Joach. Rhetici. (Kästners Gesch. d. Math. I. B. S. 581. f.)

In der Sammlung astronomischer Tafeln unter Aufsicht der kön. preuss. Akad. d. Wiss. III. B. S. 172—207. (Berl. 1776. 8°.) steht eine durch einzelne Minuten von 0 bis 90° fortlaufende Tafel der Sinus, worin diese nicht durch Theile des Halbmessers, sondern in Graden, Minuten, Secunden und Decimaltheilen von Secunden der Kreisperipherie, demnach durch Bogen ausgedrükt sind, welche mit den Sinus gleiche Länge haben. Nach Joh. Playfairs, Prof. der Math. zu Edinburg, Observations on the trigonometrical tables of the Brahmins (Transact. of the roy. Ac. of. Edinburgh. Vol. IV. Edinb. 1798. Part. II. p. 82. sqq.), die sich auf einen in dem 2ten Band der Asiatic Researches gegebenen Auszug aus dem astronomischen Lehrbuch der Brahminen, Surya Siddhanta betitelt (dessen Alter auf 2000. Jahre vor C. G. reichen soll) gründen, ist diese Art trigonometrischer Tafeln in Indien uralt. Ausser Sinus enthalten sie Sinus Versus, aber nur für 24theile des Quadranten, also für 3 45′ und dieses Bogens vielfache; beyde in Minuten oder 21600theilen der Peripherie ausgedrükt, unter Voraussezung des Verhältnisses des Diameters zur Peripherie = 1 : 3,1416: welches Verhältnis zu dem Zweck zureicht; und weit genauer ist als das von Peurbach (Tract. super proposit. Ptolemæi de siuubus & chordis. fol. A. 2.) den Indiern zugeschriebene: Secundum Indos, si diameter fuerit unitas, erit circumferentia radix de decem.

Briggische Logarithmen der Sinus und Tangenten, durch alle Minuten auf sieben Decimalstellen (ohne die Kennziffer) für Log. sin. tot. = 10 berechnet, hat zuerst der in der Note zu §. 43. erwähnte Edmund Gunter 1620. in einer Schrift, welche Hutton (p. 14.) unter dem Titel Canon of triangles anführt, herausgegeben; und hernach wieder 1633. in sein Buch De sectore & radio eingerükt (Hutton l. c.). Eben dieselbe stehen in der Arithmetique logarithmique — par Edmond Wingate (Goude 1628. 8°. Kästners geom. Abh. I. Samml. S. 516. Scheibel II. B. 3. St. S. 37. ff.); wovon Hutton (p. 36.) eine Pariser Ausgabe von 1624, und eine Englische (London 1626.) anführt.

Vlacqs in der Note e zu §. 17. angezeigte Arithmetique logarithmique (Goude 1628.) enthält eine von ihm

berechnete Table logarithmique, en laquelle sont comprins les logarithmes des sinus, tangentes & secantes de tous les degrés & minutes du quart de cercle, selon le raid de 100000000000 (Lg. sin. tot. aber nur = 10 gesezt), mit Mantissen von zehn Decimalstellen. Diese Tafeln stehen auch unter dem Titel Canon triangulorum logarithmicus in dem Anhang des ersten Theils der IngenieurSchule Johann Faulhabers: Augspurg 1631. 8°. Nürnberg 1637. 4°. (Scheibel II. B. 7. St. S. 40. f. 46. Kästners Gesch. d. Math. III. B. S. 147.)

Bonaventuræ Cavalerii Directorium generale uranometricum (Bononiæ 1632. 4°.) enthält nach Huttons Bericht (p. 38.) gemeine Logarithmen der Sinus, Tangenten, Secanten und Sinus Versus, von acht Decimalstellen (each to eight places), für alle Secunden der ersten fünf Minuten, von fünf zu fünf Secunden von fünf bis zehn Minuten, für jede zehn Secunden von zehn bis zwanzig Minuten, für jede zwanzig Secunden von zwanzig bis dreissig Minuten, für jede dreissig Secunden von dreissig Minuten bis 1°30′; und durch alle Minuten für den Rest des Quadranten. In desselben Verfassers Trigonometria plana & sphærica, linearis & logarithmica — (Bonon. 1643.) aber stehen nur die Logarithmen der Sinus, Tangenten und Secanten, in sieben Decimalstellen ohne die Kennziffern, von zehn zu zehn Secunden für die erste Hälfte des ersten und für die zweyte Hälfte des lezten Grads, von dreissig zu dreissig Secunden für die zweyte Hälfte des ersten, und die erste Hälfte des lezten Grads, übrigens von Minute zu Minute. (Hutton p. 39.).

Trigonometria artificialis, sive magnus Canon triangulorum logarithmicus, ad radium 10 000 000 000, & ad dena scrupula secunda, ab Adriano Vlacquio Goudano constructus — (Goudæ 1633. fol.) enthält Logarithmen der Sinus und Tangenten mit zehn Decimalstellen, von zehn zu zehn Secunden (Scheibel II. B. 7. St. S. 30. ff. Hutton p. 37. Kästners Gesch. d. Math. III. B. S. 98.)

Gardiner hat in den §. 17. Note e. erwähnten Tables (Lond. 1742.) den Logarithmen der Sinus und Tangenten von zehn zu zehn Secunden die Logarithmen der Sinus für alle Secunden bis 72 Minuten beygefügt, die Mantissen aber durchaus auf sieben Decimalstellen eingeschränkt (Hutton p. 40.). In die ebenfalls a. a. O. angezeigte Avignoner Ausgabe dieser Tafeln (1770.) sind hingegen die von Mouton berechnete Logarithmen der Sinus und Tangenten für alle Secunden der vier ersten Grade, in ebensoviel Decimalstellen, eingerükt. In der Edition stereotype der Tables portatives

von Callet (Paris 1795.) sind solche Logarithmen der Sinus und Tangenten für alle Secunden der fünf ersten Grade; und in der zweyten Auflage von Vegas Logarithmisch-trigonometrischen Tafeln (Leipzig 1797.) für alle Zehntel der Secunde bey der ersten Minute, angegeben. Noch vor den zwey lezteren sind zu London 1792. in klein Folio herausgekommen Tables of Logarithmes of all numbers from 1 to 101 000, and of the sines and tangents to every second of the quadrant, diese auf sieben, jene (der Zahlen) zum Theil auf acht Decimalstellen, by Michael Taylor. (Götting. gel. Anz. 113. St. 1794. S. 1129. ff.)

Trigonometria Britannica, sive de doctrina triangulorum Libri duo: quorum prior continet constructionem Canonis sinuum, tangentium & secantium, una cum Logarithmis sinuum & tangentium, ad gradus & graduum centesimas, & ad minuta & secunda centesimis correspondentia; a clariss. doctiss. integerrimoque viro Dom. Henrico Briggio, Geometriæ in celeberr. Acad. Oxoniensi Prof. digniss. paulo ante inopinatam ipsius e terris emigrationem compositus: posterior vero usum sive applicationem Canonis in resolutione triangulorum tam planorum quam sphæricorum e geometricis fundamentis petita calculo facillimo, eximiisque compendiis exhibet; ab Henrico Gellibrand, Astronomiæ in Collegio Greshamensi apud Londinenses Prof. constructus (Goudæ MDCXXX III. fol.) enthält für Grade und alle Hunderttheile derselben, die Sinus in 1000 Billiontheilchen, die Tangenten und Secanten in 10 000 Milliontheilchen des Halbmessers; und gemeine Logarithmen der Sinus bis auf vierzehn, der Tangenten bis auf zehn Decimalstellen in den Mantissen, für Log. sin. tot. = 10. (Scheibel II. B. 7. St. S. 28. ff. Kästners astron. Abh. II. Samml. S. 3. ff. Geom. Abh. II. Samml. S. 395. f. Gesch. d. Math. III. B. S. 98. f.)

In der Edition stereotype der Tables portatives von Callet (Paris 1795.) steht eine Table des Logarithmes (auf sieben Decimalstellen in den Mantissen) des sinus, cosinus & tangentes de minute en minute ou de dixmillieme en dixmillieme, pour les 100 degrés du quart de cercle, suivant la nouvelle division.

Die Neue trigonometrische Tafeln für die Decimal-Eintheilung des Quadranten, berechnet von J. Ph. Hobert, Prof. d. Phys. u. Math. an der kön. preuss. Militär-Akad. des Artillerie-Corps, und Ludw. Ideler, Astron. der kön. preuss. Acad. d. Wiss. (Berlin 1799. 8°.) enthalten die Sinus, Tangenten, und ihre Logarithmen (auf vierzehn Decimalstellen), von $0{,}0000^{Q}$ bis $0{,}0300^{Q}$ (d. h. des Quadranten), und von

geben daher auch die jedem Sinus, Tangente, Secante (b) entsprechenden Zahlen die gegenseitigen Verhältnisse derselben an.

0,9700Q bis 1,0000Q, für alle Hunderttausendtheile; von 0,0300Q bis 0,9700Q für alle Zehntausendtheile des Quadranten (v. Zach Allg. geogr. Ephem. IV. B. 2s St. S. 127. ff.)

In der Schulzischen Tafeln (§. 17. Note f.) IIten Band stehen auch hyperbolische Logarithmen der Sinus und Tangenten, von zehn zu zehn Secunden für die drey ersten und lezten Grade, und von Minute zu Minute für die übrigen, bis auf acht Decimalstellen. Dieselben sind aber eigentlich — Log. hyp. sin., und + Log. hyp. Cotg. (Kästners geom. Abh. I. Samml. 479. f. Gesch. d. Math. III. B. S. 90.).

(b) In Platos von Tivoli Uebersezung des Albatenius De scientia stellarum kommt das Wort Sinus nur einmal vor (§. 14. Note b.).

Hingegen wird es durchgängig in der durch Gerhard von Cremona übersezten, und von Petrus Apianus 1533. mit seinem Instrumentum primi mobilis herausgegebenen Astronomia Gebri filii Affla Hispalensis (§. 16. Note g.) gebraucht. (Kästners Gesch. d. Math. I. B. S. 523. 581.). Riccioli (Almagest. nov. Bonon. 1653. Tom. I. Chronicon astronomorum. p. XXVII.) giebt an: Geber habe um das J. C. 1090. gelebt; und sagt von ihm (ibid. p. XXXV.): fuit posterior Arzachele, quem nominat; ferner (Lib. III. p. 157.): Geber Arzachelis calculos suspectos habuit, eo quod eandem cum Albategnio eccentricitatem, & tamen longe diversum apogei locum detexerit. Diese Stelle, und überhaupt Erwähnung Arzachels finde ich aber nicht in der angeführten Ausgabe von Gebers Astronomie. In Jo. de Monteregio & Georg. Peurbachii Epitome in Cl. Ptolemæi magnam compositionem (Basil. 1543. Lib. III. Prop. 13. p. 57.) wird angegeben: Arzachel post Albategni 193. annis 402. considerationes fecit circa puncta quatuor media inter puncta æqualitatis & solstitiorum; und Riccioli (Chronic. astron. p. XXXI.) fügt hinzu: Aben Ezra (von dem er p. XXVIII. sagt: Floruit anno Christi 1144. vel 1150.) in libro, cui titulus est Initium sapientia — se illo [Arzachele] posteriorem annis 71. fatetur. So wird die Zeit der Beobachtungen Arzachels zwischen 1070 und 1080 gesezt (Riccioli l. c. p. XXVII. XXXIII. Hist. cœlest. Liber προλεγομ. p. XXXV.). Noch führt Riccioli (Lib. VII. p. 494.) aus Alpetragii (von dem er Chron. p. XXIX. sagt: Alpetragius Marrocitanus astronomus flo-

Sind nämlich m, n, p, q die in solchen Tafeln dem Sinus totus, sin. α, Tg. β, sec. γ entsprechenden Zahlen; d. h. sind in denselben

ruit inter annos 1145 & 1154 Christi) Theorica physica Cap. 9. folgende Stelle an: Ambo isti planetæ Venus & Mercurius currunt necessario per lineas transeuntes aliquando per visum nostrum & solem, ut concedunt radices & motus ab eo [Ptolemæo.] positi, & jam Mahumedes Geber filius Afflah de hac re demonstrationem attulit, reprehendens ordinem Ptolemæi. Dieß halten nämlich Alpetragius und Geber (Astronom. Lib. VII. p. 104. sq.) dem Ptolemäus entgegen, welcher die Einwendung, quod nunquam visus sit sol ab his planetis eclipsim pati, beantwortete (Almag. Lib. IX. Cap. 1.): Possunt planetæ aliqui esse sub sole, & tamen non esse in linea, quæ per ipsos ac solem visumque nostrum est. Abulpharajius (Hist. compend. dynastiar. Oxon. 1663. S. §. 14. Note b.) erzählt (p. 342. sq.): Eodem anno [Christi 1226.] e vita excessit Yusef Yahya Ebn Isaac Subtensis Mogrebinus. Medicus hic fuit ex incolis Phares (Pocock bemerkt: forsan Kades) — Cum Iudæi in istis partibus ad religionem Islamiticam suscipiendam, aut migrandum, compellerentur; religione sua celata in Aegyptum cum facultatibus suis abiit: ubi cum Mosem Ebn Maimon Cordubensem, Indæorum in Aegypto priacipem, convenisset, — rogavit ipsum, ut Astronomiam Ebn Aphlah Hispani, quam secum Subta attulerat, corrigeret. Ei ergo corrigendæ & concinnandæ ipse & Moses mutuam navarunt operam. Auf diese Stelle bezieht sich auch Costard in der Vorrede der Oxforder Ausgabe des Menelaus (§. 8. Note d.), und sezt hinzu (p. V. sq.): Iudæum fuisse [Ebn Aphlah] Maimonidis auctoritate (More Nebuch. Part. II. C. 9.] fretus, inducor ut credam. „Andelose„nos enim — Venerem & Mercurium esse supra solem „ — demonstrasse perhibet. De qua re, inquit, li„brum celebrem conscripsit Ebn Aphlah Hispalensis, cum „cuius filio familiaritas mihi intercessit.“ Nullam vero gratiam, nedum familiaritatem cum Ishmaelita Iudæum inire velle, fidenter statuamus. Moses Ebn Maimon ist in Egypten, wohin er vor dem J. 1171. aus Spanien gezogen war, im J. C. 1208. gestorben (Hist. compend. Dynast. p. 297. sq.); und zwar der gemeinen Angabe nach 70 Jahre alt. Diese Nachrichten treffen ziemlich darin zusammen, daß Geber seine Astronomie um das Ende des eilften, oder den Anfang des zwölften Jahrhunderts geschrieben

$\sin.\alpha : \sin.tot. = n : m$ (§. 16.)

$Tg.\beta : \sin.tot. = p : m$ (§. 63.)

$\sec.\gamma : \sin.tot. = q : m$ (§. 70.)

mithin $\sin.\alpha : \sin.tot. = n : m$

$\sin.tot. : Tg.\beta = m : p$ $\quad Tg.\beta : \sin.tot. = p : m$

$\sin.tot. : \sec.\gamma = m : q$ $\quad \sin.tot. : \sec.\gamma = m : q$

so sind auch (V,22.) $\sin.\alpha : \left\{\begin{matrix} Tg.\beta \\ \sec.\gamma \end{matrix}\right\} = n : \left\{\begin{matrix} p \\ q \end{matrix}\right.$ $\quad Tg.\beta : \sec.\gamma = p : q$

habe. Die Lebenszeit des Ueberſezers derſelben, Gerhards von Cremona, ſezen zwar Riccioli (Chron.astron.p.XXVII. XXXV.), Weidler (p. 286.), um das J. 1346. Lezterer ſagt: A. 1346. Gerhardus Cremonensis, medicus & mathematicus, qui a patria Cremonæ vicina Suclonata sidicitur (Gesner Biblioth. p. 280.), vertit ex Arabico Ptolemæi magnam constructionem — Gebri quoque libros arabicos, & Alhazenii Tractatum de crepusculis latine reddidit, & Theoricas planetarum exposuit. (Käſtners Geſch. d. Math. III. B. S. 318.) Dieſer iſt aber wahrſcheinlich der nämliche, welchen Guido Bonatus (De astronomia tractatus X. Basil. MDL. P. II. Cap. VI: p. 335.) als ſeinen Zeitgenoſſen anführt mit den Worten: Illi autem, qui fuerunt tempore meo, sicut fuit — Girardus de Sabloneto Cremonensis — utebantur in omnibus supra dictis prima & septima [domo]: und Bonatus ſelbſt giebt ſich als einen Zeitgenoſſen Kaiſers Friedrich II. an (P. I. p. 209.); redet von einer Perſon, die er im J. 1223. geſehen, und von Begebenheiten der Jahre 1267. f. (ibid. u. P. IV. p. 593. P. V. p. 819.); und iſt nach Bettinelli (Risorgimento d' Italia negli studi, nelle arte, e ne costumi dopo il Mille. Bassano 1786. p. 110.) in dem J. 1300. geſtorben. So möchte die Ueberſezung des Almageſts, von welcher Weidler p. 178. redet: Ex arabico Μεγαλη Συνταξις conversa est auspiciis Friderici II. Imperatoris circa annum 1230, und die auch Bettinelli (p. 109.) erwähnt, eben dieſem Gerard zuzuſchreiben ſeyn (Montucla T. I. p. 509.). Die andere aber, von welcher Weidler p. 178. sq. ſagt: Aliam ex Arabico translationem suscepit & absolvit Girardus Cremonensis, quæ manuscripta extat in Bibliotheca Laurentiana Norimbergensi, ubi eandem anno 1727. me vidisse memini; dicitur ibi magister Girardus Cremonensis vertisse Ptolemæum in Toleto; eignet Bettinelli (p. 81.) einem älteren Gerard von Cremona zu, welche 1187. in einem Alter von 73 Jahren geſtorben. Hr. v. Murr (Notitia trium codicum avtographo-

§. 72.

In der 35ten Figur ſind

rum Joh. Regiomontani. Norimb. 1801. p. 4.) ſagt hinzugen: A. C. 827. jussu Chalifæ Almamuni, non e textu Græco, sed e Syriaca versione, ut dicitur, in Arabicum sermonem conversa fuit Μεγαλη Συνταξις; ex hoc auspiciis Friderici II. Imp. circa a. 1230. translata est in Latinum. Aliam versionem ex Arabica absolvit magister Gerardus Cremonensis (haud cum Carmonensi a. 1184. mortuo confundendus) circa a. 1346. Toleti; quæ versio exstat inter codices Bibliothecæ publicæ Norimbergensis, haud in Laurentiana s. Fenizeriana, ut scribit Weidlerus in Hist. Astron. p. 179. Prodiit Venetiis 1515. fol. ap. Petrum Lichtenstein. Est in Bibliotheca Ebneriana. (Memorabilia Biblioth. publ. Norimb. P. II. p. 227.). Vergl. Montucla l. c. welcher auch die zwey Gerard unterſcheidet; und Muratori (Antiquit. Italicæ medii ævi. T. III. p. 336. sqq.), welcher nur den ältern anerkennt, und darthut, daß Carmonensis durch verdorbene Ausſprache aus Cremonensis entſtanden ſey.

Willebrord Snellius Darſtellung und Muthmaſſungen von der Einführung des Worts Sinus ſcheinen dieſemnach nicht ganz der Geſchichte gemäß zu ſeyn (Doctrinæ triangulorum canonicæ Libri quatuor. Lugd. Bat. 1727. Lib. I. Prop. 3. p. 4.): Sinus rectus est recta ab altero peripheriæ termino diametro per reliquum eductæ perpendicularis. Sinus nomen hac quidem notione a Latina lingua est alienum. Et barbaro illo seculo usurpari cœptum, cum ab Arabibus etiam Græcos scriptores mutuarentur: Arabes enim, ut videtur, primi pro inscriptis veteri Græciæ usitatis earum semisses summa cum utilitate adhibuerunt. Atque ita a Gebro, vertente Gerardo Cremonensi, definitur sinus arcus medietas chordæ peripheriæ duplæ: ut hoc nomen a Cremonensi primum in scholas sit illatum; aut, cum jam ante receptum esset, ab eo usurpatum: nisi forte ab Appiano sit substitutum. Certe Plato Tiburtinus multo Cremonensi recentior, quique Albategnium convertit, aliter longe Gebrum [eum] loquentem introducit —

Das Wort Sinus ſelbſt betreffend, ſagen Fink (Geometr. rotundi. p. 64.): Sinus est recta a termino peripheriæ perpendicularis. Sinus vocabulum in hac significatione est arabicum, & ideo barbarum; Lansberg (Triangulorum geometr. p. 2.): Vox sinus arabica est, & proinde

CT die Secante des spizen Winkels ACM
CR die Secante seines Complements BCM
oder die Cosecante von ACM
für den Halbmesser CA (§. 69. f.)

barbara; Guarinus (Euclides adauctus & methodicus. Aug. Taurin. 1671. p. 307.): Sinus rectus est dimidiata chorda a diametro ei perpendiculari secta. Sinus vero est nomen Arabicum usurpatum in hanc significationem a mathematicis. Diese Schriftsteller scheinen also die Benennung Sinus für ursprünglich Arabisch gehalten zu haben, so wie die Worte Zenith, Nadir, u. a. dgl.

Auf eine ähnliche Art drükt sich Vieta in der Stelle aus, welche Hutton (p. 18.) aus seinem Universalium inspectionum ad canonem mathematicum Liber (p. 9.) anführt: Breve sinus vocabulum, cum sit artis, Saracenis præsertim quam familiare, non est ab artificibus explodendum. Hingegen scheint er eine andere Ansicht der Sache, über die er sich aber nirgends weiter erklärt, in der vorhin (Note a.) angeführten Stelle anzudeuten: Arabes semisses inscriptas duplo, numeris præsertim æstimatas, vocaverunt allegorice sinus. (Vgl. das Ende dieser Note)

Als Versuch, das was Vieta angedeutet hat, zu entwikeln, kann folgende Stelle des Lexicon mathematicum astronomicum geometricum, hoc est rerum omnium ad utramque, imo et ad omnem fere mathesin, quomodocunque spectantium collectio & explicatio — Auctore Hieronymo Vitali Capuano, Clerico vulgari vulgo Theatino (Paris 1668. 8°. p. 455.) angesehen werden: Sinus præcise indicat amplitudinem quandam intra duos terminos constitutam. Hinc curvitas illa, quæ est intra pectoris brachiorumque complexum, antonomastice sinus audit. Similiter littora curva, quæ duobus continentis quasi brachiis in mare longius procurrentibus includuntur, & alia his similia, per translationem sinus etiam appellantur. Porro eadem ratione apud geometras lineæ rectæ, quæ alicujus arcus cavitatem & aream claudunt, sinus vocantur, seu potius chordæ; quarum tamen semisses verius dicuntur sinus: & quidem recti, si recte arcui subtenduntur; versi vero, si ad modum sagittæ sinubus rectis adjaceant, ita ut cum iis angulum rectum efformet. P. Gasp. Schott (Cursus mathemat. Francof. 1674. fol. p. 111.) faßt es kürzer so zusammen: Uterque sinus, tam rectus, quam versus, appellatur ideo sinus, quia una cum arcu constituit formam sinus seu portus maritimi clausi. Umständlicher erklärt sich darüber Hutton (p. 18.):

und man hat (VI, 2.) $CP : CA = CM : CT$

$CQ : CB = CM : CR$

d. h. $\text{Cosin. ACM} : \text{sin. tot.} = \text{sin. tot.} : \text{sec. ACM}$

$\text{sin. ACM} : \text{sin. tot.} = \text{sin. tot.} : \text{Cosec. ACM}$

Daher $\text{sec. ACM} = \frac{\text{sin. tot.}^2}{\text{Cosin. ACM}}$

$\text{Cosec. ACM} = \frac{\text{sin. tot.}^2}{\text{sin. ACM}}$

Long before i either saw or heard of any conjecture or observation concerning the etymology of the word sinus, i remember, that i imagined it to be taken from the same Latin word, signifying breast or bosom, and that our sine was so called allegorically. I had observed that several of the terms in trigonometry were derived from a bow to shoot with, and its appendages: as arcus the bow, chorda the string, and sagitta the arrow, by which name the versed sine, which represents it, was sometimes called; also that the tangens was so called from its office, being a line touching the circle, and secans from its cutting the same. I therefore imagined, that the sinus was so called, either from its resemblance to the breast or bosom, or from its being a line drawn within the bosom (sinus) of the arc, or from its being that part of the string (chorda) of a bow (arcus), which is drawn near the breast (sinus) in the act of shooting.

Daß aber dieſe Etymologien nicht richtig ſeyen: ſo wie auch die von Montucla in der erſten Ausgabe ſeiner Hist. des Math. (Paris, 1758. T. I. p. XXXIII. Addit. & Correct.) angeführte Vermuthung Godins, nach welcher die Abkürzung S. Ins. von semissis inscriptæ in Sinus übergegangen ſeyn ſoll, wie die Co. sin. von Complementi sinus in Coſinus; erhellet aus demjenigen, was in der Note b zu §. 14. bemerkt worden iſt. (Käſtners Geſch. d. Math. I. B. S. 522. f.)

Die Einführung der Benennungen Tangente, Secante ſchreibt ſich Thom. Fink zu (Geometria rotundi. 1583. p. 73. sq.): Recta sinibus connexa est tangens peripheriæ, aut eam secans. Proposuimus ut in circulo inscriptas, sic in semicirculo sinus perpendendos, sed & rectas sinibus connexas. Eas plenioris intellectus causa in tangentes & secantes dislocamus: verbis si hac in re, non nova, novis; tamen, ut speramus

Eines ſpizen Winkels Secante verhält ſich alſo zum Sinus totus, wie der Sinus totus zum Coſinus eben die-

accommodatis. Tangens est a termino peripheriæ altero perpendicularis in radium extra per reliquum terminum continuatum — Sic vocare placuit, quia sit perpendicularis extremæ diametro. Hoc dato per r. e. 2. [Geometriæ P. Rami] erit tangens. Itaque geometria ipsa commodum suppeditavit nomen; nec aliunde adferri commodius potest. Nam quod quidam numerum fœcundum rectam AT [Fig. 35.] vocant: id ii videant, quomodo defendant; mihi non probant. Demus aliquid peritissimo illi artifici Regiomontano, homini Germano, qui primus hujus vocabuli author videtur; verum id non facile damus, ut verba ea in usu retineamus, quibus elegantiora, breviora, significantiora, veriora habeamus. Rheticus in tabula a se edita & triangulorum canone non tantum rectam AT, sed & sinum, modo basin trianguli, modo cathetum & perpendiculum, oppositi anguli ratione, vocat. Quæ si ratio commutationis verborum ejusdem lineæ cui placeat, per me certe licet. Interim tamen si basin ille vocet, ego legitime perpendiculum vocare possum; quia si basi recta est perpendicularis, & basis erit eidem rectæ perpendicularis. Sed de nominibus litigare nolumus. Quæ nobis bona Rheticus communicavit, grato animo agnoscimus; agnoscent alii. Und p. 76: Secans est radius per terminum peripheriæ in tangentem continatus, cum continuatione — Et hoc nomen huic recte accommodatum putamus. Joachimus Rheticus hypotenusam trianguli rectanguli [CAT] vocat respectu anguli recti ad A, cui subtenditur. Verum cum referatur non ad angulum rectum, sed ad angulum in centro ad C, h. e. arcum AM; annon potius secans dicatur, quam recti anguli hypotenusa, judicent alii. Maurolycus canonem Rhetici paulo mutatum in Messanensi Menelai editione nomine etiam mutato edidit, & beneficum vocavit; tanquam recta CT, seu numerus hanc definiens, beneficus diceretur. At recta CT non magis est benefica, quam recta AT fœcunda.

Clavius und Lansberg in ihren in der Note zu §. 43. angeführten trigonometriſchen Schriften von 1586. und 1591, welche auch ſonſt deutliche Spuren von Beziehung auf Finks Geometr. rotundi enthalten (§. 43. Note), bedienen ſich ſchon durchgängig der Benennungen Tangenten, Secanten: und erwähnen die ältere entweder nur in den Aufſchriften der Tafeln, wie Lansberg (S. §. 69. Note c.); oder ſonſt kurz,

ſes Winkels; und ſeine Coſecante verhält ſich zum Sinus totus, wie der Sinus totus zum Sinus des nämlichen Winkels: oder von den zwey Verhältniſſen, dem des Coſinus und dem der Secante eines ſpizen Winkels zum Si-

wie Clavius (p. 189.): Tangentem nonnulli vocant adscriptam (wie Breſcius 1581. S. Note a.), quod circulo quodammodo adscribatur; secantem vero hypotenusam, quod in triangulo rectangulo ACT — angulum rectum subtendit; und in dem Titel der Secantentafel (p. 241.): Tabula linearum secantium, sive benefica.

Nach der Beſchreibung, welche Hutton, Montucla, und Vieta ſelbſt (S. Note a.) von ſeinem 1579. herausgegebenen Canon mathematicus machen, kommen die Namen, Tangenten, Secanten, darin noch nicht vor. In ſeiner ſpäteren Schrift, Varior. de rebus math. responsor. Liber VIII, führt er ſie nach der in der Note a. dieſes §. ausgezogenen Stelle (Opp. p. 17.), aber mißbilligend, an; und ſchlägt ſtatt ihrer andere vor: Sane præter inscriptas & circumscriptas circulum etiam adficiunt aliæ lineæ rectæ, velut incidentes, tangentes, & secantes. Verum illæ voces substantivæ sunt, non peripheriarum relativæ. Ac secare quidem circulum linea recta tunc intelligitur, cum in duobus punctis secat. Itaque non loquuntur bene geometrice, qui eductas e centro ad metas circumscriptarum vocant secantes improprie, cum secantes & tangentes ad certos angulos vel peripherias referunt. Immo vero artem confundunt, cum his vocibus necesse habeat uti geometra abs relatione. Quare si quibus arrideat Arabum metaphora, quæ quidem aut omnino retinenda videtur, aut omnino explodenda; ut semisses inscriptas Arabes vocant sinus; sic semisses circumscriptæ vocentur prosinus, amsinusve; & eductæ e centro, transsinuosæ. Sin allegoria displiceat, geometrica sane inscriptarum & circumscriptarum nomina retineantur. Et cum eductæ e centro ad metas circumscriptarum non habeant hactenus nomen certum neque elegans, vocentur sane prosemidiametri, quasi proténsæ semidiametri, se habentes ad suas circumscriptas, sicut semidiametri ad inscriptas. Und der erſten dieſer vorgeſchlagenen Benennungen bedient ſich Vieta in der zu Paris 1595. herausgegebenen Schrift: Ad problema, quod omnibus mathematicis totius orbis construendum proposuit Adrianus Romanus, Responsum (Opp. p. 323.), mit dem Beyſaz: Transsinuosas voco hypotenusas, quas suppeditat canon fœcundissimus; prosinus, latera circa rectum, quæ canon fœcundus.

nus totus; so wie auch von den zwey andern, dem des Sinus und dem der Cosecante eines spizen Winkels zum Sinus totus, ist das eine das umgekehrte des andern: wie auch aus der Vergleichung der Proportionen §. 68. und 69. erhellet.

Und die Secante eines spizen Winkels ist gleich dem Quadrat des Sinus totus dividirt durch den Cosinus des Winkels; die Cosecante, dem Quadrat des Sinus totus dividirt durch den Sinus. Woraus sich die Art ergibt, die Secanten und Cosecanten der spizen Winkel aus ihren Sinus und Cosinus, so wie auch die Logarithmen jener aus den Logarithmen dieser, für eben den Halbmesser, wie die Sinus, zu berechnen.

§. 73.

In einem rechtwinklichten Dreyek verhält sich daher jede Seite um den rechten Winkel zur Hypotenuse: wie der Sinus des jener gegenüberliegenden Winkels, oder der Cosinus des an ihr liegenden spizen Winkels, zum Sinus totus; auch wie der Sinus totus zur Secante des an jener liegenden spizen Winkels, oder zur Cosecante des ihr gegenüberliegenden Winkels; und noch wie die Tangente des jener gegenüberliegenden Winkels zu eben dieses Winkels Secante, oder wie die Cotangente des an ihr liegenden spizen Winkels zu seiner Cosecante, beyde für einerley Halbmesser.

Die eine Seite um den rechten Winkel aber verhält sich zur andern Seite um diesen Winkel: wie der Sinus des der ersten gegenüberliegenden Winkels zu seinem Cosinus, oder wie der Cosinus des jener anliegenden spizen Winkels zu desselben Sinus, für einerley Halbmesser: auch wie die Tangente des der ersten gegenüberliegenden, oder die Cotangente des an ihr liegenden spizen Winkels, zum Sinus totus; und noch wie der Sinus totus zur Tangente des an der ersten liegenden spizen Winkels, oder zur Cotangente des ihr gegenüberliegenden Winkels *).

Näml. AB : BC = $\left\{\begin{matrix}\text{sin. C}\\ \text{Cosin. B}\end{matrix}\right\}$: sin.tot. (*Fig.* 19. §. 10. 13. 43.)

= BD : BF (*Fig.* 23.) = sin.tot. : $\left\{\begin{matrix}\text{sec. B}\\ \text{Cosec. ACB}\end{matrix}\right.$ (§. 69.)

= GH : CH (*Fig.* 24.) = $\left\{\begin{matrix}\text{Tg. C} & \text{:sec. C}\\ \text{Cotg. ABC} & \text{:Cosec. ABC}\end{matrix}\right\}$ für einerley Halbmesser (§. 62. 64. 69.)

*) Vincenzio Formaleoni führt in seinem zu Venedig 1783. herausgegebenen Saggio fulla nautica antica de' Veneziani (wovon Hr. Jagemann einen Auszug in des Kielischen Magazins vor die Gesch. Staaskugheit und Staatenkunde I. B. 3s St. 1784. eingerükt hat, und dessen auch Hr. v. Murr in s. Notitia trium codd. avtogr. Joh. Regiomontani p. 21. sq. erwähnt) eine kleine Steuermannstafel und Anweisung zu ihrem Gebrauch an, welche er auf einer in der S. Marcus Bibliothek zu Venedig vorhandenen, 1436. von Andreas Bianco aus Venedig gezeichneten Seecharte gefunden. Diese Tafel enthält erstlich in zwey Columnen die Längen der Seiten AC, AB des bey A rechtwinklichten Dreyeks BAC (Fig. 22. 23.) in Hunderttheilen der Hypotenuse BC für die den Windstrichen eines Compasses entsprechende Winkel ABC = $\frac{1}{8}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{8}$ .... $\frac{7}{8}$ eines rechten; alsdenn für eben diese Winkel, in zwey andern Columnen, die Längen der Hypotenuse BC und der einen Seite AB um den rechten Winkel, in Zehntheilen der andern AC; folglich erstlich Sinus und Cosinus der angegebenen Winkel ABC für den Halbmesser 100; alsdenn derselben Cosecanten und Cotangenten für den Halbmesser 10 (§. 11. 43. 64. 69. 73.): so daß diese Tafel ein Bruchstük eines ganzen trigonometrischen Canon nach der von Rheinhold, Rhäticus und Vieta beachteten Ansicht (§. 62. Note e. §. 69. Note c. §. 71. Note a.), und nach Decimaleintheilung des Sinus totus, darstellt. Formaleoni sezt dieselbe (p. 9. sqq.) der Aeusserung des Abts Joseph Toaldo, Prof. d. Astron. zu Padua, in seinen 1782. herausgegebenen Saggi di Studj Veneti, entgegen: daß die Venetianer den Gebrauch der Decimaleintheilung des Halbmessers, der Tangenten, und der Trigonometrie überhaupt in der Schiffarth von Regiomontanus bey seinem Aufenthalt zu Venedig im J. 1463. erlernt haben; und folgert im Gegentheil daraus: Regiomontanus habe damals in Venedig die beyden ersten Rechnungs-Vortheile kennen gelernt. Daß jenes ungegründet sey, ergeben auch die Bemerkungen §. 16. Note d, und §. 62. Note c. Dieses möchte aber wohl nach eben denselben, und nach §. 69. Note b, nicht viel Wahrscheinlichkeit für sich haben.

und $AB : AC = \left\{\begin{matrix}\text{sin. C : Cosin. C}\\ \text{Cosin. B : sin. B}\end{matrix}\right\}$ für einerley Halbmeff. (*Fig.* 19. §. 10. 13. 43.)

$= GH : CG$ (*Fig.* 24.) $= \left\{\begin{matrix}\text{Tg. C}\\ \text{Cotg. ABC}\end{matrix}\right\} : \text{sin. tot.}$ (§. 62. 64.)

$= BD : DF$ (*Fig.* 23.) $= \text{sin. tot.} : \left\{\begin{matrix}\text{Tg. B}\\ \text{Cotg. ACB}\end{matrix}\right.$ (§. 62. 64.)

§. 74.

Beyspiele zu §. 64. 68. 69. *Fig.* 23.

Es sey $AB = 52$ R. (wie in §. 61.)

$AC = 39$

so ist $\left.\begin{matrix}\text{Tang. ABC}\\ \text{Cotg. ACB}\end{matrix}\right\} = \frac{AC}{AB}$ sin. tot. (§. 64.)

oder $\left.\begin{matrix}\text{Tang. ACB}\\ \text{Cotg. ABC}\end{matrix}\right\} = \frac{AB}{AC}$ sin. tot.

Lg. AC = 1,5910646
Lg. AB = 1,7160033

Lg. Tang. ABC } = 9,8750613 ABC = 36° 52′ 11″,64
Lg. Cotg. ACB } ACB = 53 7 48,36
90 0 0

Lg. Tang. ACB }
Lg. Cotg. ABC } = 10,1249387

ferner $BC = \frac{AC \text{ sin. tot.}}{\text{sin. B}} = \frac{AB \text{ sin. tot.}}{\text{sin. C}}$ (§. 68.)

$= \frac{AC \text{ Cosec. B}}{\text{sin. tot.}} = \frac{AC \text{ sec. C}}{\text{sin tot.}}$
$= \frac{AB \text{ Cosec, C}}{\text{sin tot.}} = \frac{AC \text{ sec. B}}{\text{sin. tot.}}$ } §. 69. 73.

Lg. AC sin. tot. = 11,5910646
Lg. sin. B = 9,7781513
Lg. BC = 1,8129133 BC = 65,0 R.

Lg. AB sin. tot. = 11,7160033
Lg. sin. C = 9,9030900
Lg. BC = 1,8129133

Lg. AC = 1,5910646
Lg. Cosec. B } = 10,2218487
Lg. sec. C }
Lg. BC = 1,8129133
Lg. AB = 1,7160033
Lg. Cosec. C } = 10,0969100
Lg. sec. B }
Lg. BC = 1,8129133

Ebenso findet man, wenn

AB = 143 R.
AC = 96

Lg. Tang. ABC } = 9,8269352
Lg. Cotg. ACB }

Lg. Tang. ACB } = 9,1730648
Lg. Cotg. ABC }

ABC = 33° 52' 28",55
ACB = 56 7 31 ,45
90 0 0

Lg. AC sin. tot. = 11,9822712
Lg. sin. B } = 9,7461491
Lg. Cosin. C }
Lg. BC = 2,2361221

Lg. AB sin. tot. = 12,1553360
Lg. sin. C } = 9,9192139
Lg. Cosin. B }
Lg. BC = 2,2361221

BC = 172,2353 Ruthen
wie §. 61.

Lg. AC = 1,9822712
Lg. Cosec. B } = 10,2538509
Lg. sec. C }
Lg. BC = 2,2361221
Lg. AB = 2,1553360
Lg. Cosec. C } = 10,0807861
Lg. sec. B }
Lg. BC = 2,2361221

Anmerkungen über die Berechnung der vorhergehenden Beyspiele.

1.) Man findet den einer gegebenen Tangente, Cotangente oder ihren Logarithmen entsprechenden Winkel, und umgekehrt, auf dieselbe Art, wie oben Anmerk. 2 und 3. zu §. 28. Anmerk. 2. zu §. 32. Anmerk. 1 u. 2. zu §. 35. Anmerk. 2. zu §. 36. für die Sinus und Cosinus und ihre Logarithmen gezeigt wurde; weil die Unterschiede der Tangenten, Cotangenten und ihrer Logarithmen, wie man in den Tafeln sieht, zwar nicht nach aller Schärfe, aber doch desto genauer den Unterschieden ihrer Winkel proportional sind, je kleiner diese Unterschiede sind.

2.) Die Logarithmen der Sekanten stehen nicht in den gemeinen trigonometrischen Tafeln, weil man sie leicht aus den Logarithmen der Sinus erhält. Da nämlich, wenn A einen beliebigen spizen Winkel bezeichnet

$$\text{sec. A} = \frac{\text{sin. tot.}^2}{\text{Cosin. A}} \text{ und Cosec. A} = \frac{\text{sin. tot.}^2}{\text{sin. A}} \text{ (§. 72.)}$$

so hat man Lg. sec. A = 2 Lg. sin. tot. - Lg. Cosin. A

= 20 - Lg. Cosin. A

und Lg. Cosec. A = 20 - Lg. sin. A.

Dieses Abziehen kann man sogleich beym Herausschreiben des Logarithmen aus den Tafeln bewerkstelligen; und wenn der Logarithme des Sinus oder Cosinus nicht in den Tafeln vorkommt, die Proportionaltheile mit entgegengesetztem Zeichen anhängen.

Man verlange z. B. den Logarithmen der Sekante von 56° 7′ 31″,45.

Man findet Lg. sec. 56° 7′ 0″	=	10,2537523
Prop. Theile für 31″,45	=	+ 986
folglich Lg. sec. 56° 7′ 31″,45	=	10,2538509

Ebenso findet man Lg. Cosec. 56° 7′ 31″,45.

Nämlich Lg. Cosec. 56° 7′ 0″ = 10,0808306
Prop. Theile für 31″,45 = - 445
folglich Lg. Cosec. 56° 7′ 31″,45 = 10,0807861

3.) Obgleich beym Gebrauch der Logarithmen die Sekanten keine besonderen Vortheile gewähren, und, da sie nicht in den Tafeln stehen, das Abziehen nicht vermieden wird; so kann man sie doch mit Vortheil gebrauchen, wenn derselbe Logarithme Sinus oder Cosinus öfters, oder die Summe mehrerer solcher Logarithmen abzuziehen wären. Soll der Logarithme der Sekante oder Cosekante addirt, und hernach der Logarithme des Sinus totus abgezogen werden, wie in den vorhergehenden Beyspielen, so darf man nur den Logarithmen des Cosinus oder Sinus von 10 abziehen, und den Rest addiren. Dieser Ueberschuß der Logarithmen über 10 heißt gewöhnlich ihr arithmetisches Complement. Es ist nämlich $\frac{\text{Sec. A}}{\text{sin. tot.}} = \frac{\text{sin. tot.}}{\text{Cos. A}}$ und $\frac{\text{Cosec. A}}{\text{sin tot.}} = \frac{\text{sin tot.}}{\text{sin. A}}$ (§. 72.) folglich

$$\text{Lg.}\left(\frac{\text{Sec. A}}{\text{sin. tot.}}\right) = \text{Lg. sin tot.} - \text{Lg.Cos.A} = 10 - \text{Lg.Cos.A}$$
$$= \text{C. ar. Lg. Cos. A}$$

$$\text{Lg.}\left(\frac{\text{Cosec. A}}{\text{sin. tot.}}\right) = \text{Lg. sin. tot.} - \text{Lg.sin.A} = 10 - \text{Lg.sin.A}$$
$$= \text{C. ar. Lg. sin. A.}$$

In dem zweyten der vorhergehenden Beyspiele könnte man hienach BC so finden.

Lg. AC = 1,9822712
C. Lg sin. B = 0,2538509
Lg. BC = 2,2361221

Oder

Lg. AB = 2,1553360
C. Lg. Cos. B = 0,0807861
Lg. BC = 2,2361221

§. 75.

Wenn viertens die gegebenen Seiten AB, AC des Dreyeks ungleich sind; und der gegebene Winkel, welchen sie

einschlieſen, ein schiefer ist (*Fig.* 26. 27.): so ergeben sich das auf die gröſsere Seite AB aus dem Scheitelpunkt C des gegenüberliegenden Winkels gefällte Perpendikel oder die Höhe CD, und der Inhalt des Dreyeks, auf die nämliche Art wie §. 60. durch die Proportionen (§. 13. 14. 18.)

$$\text{sin. tot.} : \text{sin. BAC} = \begin{cases} \text{AC} & : & \text{CD} \\ \frac{1}{2}\text{AB} \times \text{AC} & : & \frac{1}{2}\text{AB} \times \text{CD} \end{cases}$$

folglich ist die Höhe $\text{CD} = \frac{\text{sin. BAC}}{\text{sin. tot.}} \text{AC}$

der Inhalt des Dreyeks $= \frac{\text{sin. BAC}}{2\text{sin. tot.}} \text{AB} \times \text{AC}$.

§. 76.

Ferner ist

$$\text{BC}^{\text{q}} = \begin{cases} \text{AB}^{\text{q}} + \text{AC}^{\text{q}} - 2\text{AB} \times \text{AD} \text{ (II,13.)} & \text{wenn der W. BAC spiz ist (\textit{Fig.} 26.)} \\ \text{AB}^{\text{q}} + \text{AC}^{\text{q}} + 2\text{AB} \times \text{AD} \text{ (II,12.)} & \text{wenn der W. BAC stumpf ist (\textit{Fig.} 27.)} \end{cases}$$

Aber (§. 31.)

$$\text{folglich auch } 2\text{AB} \times \text{AC} : 2\text{AB} \times \text{AD} \Big\} = \text{sin. tot.} : \begin{cases} \text{Cosin. BAC im 1. Fall (\textit{Fig.} 26.)} \\ \text{Cosin. CAD im 2. Fall (\textit{Fig.} 27.)} \end{cases}$$

Daher

$$\text{BC}^{\text{q}} = \begin{cases} \text{AB}^{\text{q}} + \text{AC}^{\text{q}} - 2\text{AB} \times \text{AC} \times \frac{\text{Cosin. BAC}}{\text{sin. tot.}} & (\textit{Fig.} 26.) \\ \text{AB}^{\text{q}} + \text{AC}^{\text{q}} + 2\text{AB} \times \text{AC} \times \frac{\text{Cosin. CAD}}{\text{sin. tot.}} & (\textit{Fig.} 27.) \end{cases}$$

oder weil, vermöge der §§. 42. ff. gegebenen Erklärungen, des stumpfen Winkels BAC (*Fig.* 27.) Cosinus der negativ genommene oder mit dem entgegengesezten Zeichen bezeichnete Cosinus seines Supplements CAD ist, d. h. weil Cosin. BAC = - Cosin. CAD, oder - Cosin. BAC = Cosin. CAD; so ist allgemein

$$BC^q = \begin{cases} AB^q + AC^q - 2AB \times AC \times \frac{\text{Cosin. BAC}}{\text{sin. tot.}} \\ AB \times AC \left(\frac{AB}{AC} + \frac{AC}{AB} - \frac{2\text{Cosin. BAC}}{\text{sin. tot.}} \right) \end{cases}$$

Die leztere Formel ist zur Rechnung bequemer, wenn nicht die Seiten des Dreyeks selbst, sondern ihre Logarithmen unmittelbar gegeben sind.

§. 77.

Hat man hiernach die Seite BC berechnet; so lassen sich die zwey andere Winkel des Dreyeks mittelst der Proportionen §. 18. finden:

$$BC : \begin{Bmatrix} AC \\ AB \end{Bmatrix} = \text{sin. BAC} : \begin{Bmatrix} \text{sin. B} \\ \text{sin. ACB} \end{Bmatrix}$$

Weil nun auch (VI, 22.)

$$\text{oder } AB^q + AC^q - 2AB \times AC \times \frac{\text{Cosin. BAC}}{\text{sin. tot.}} \Big\} : \begin{Bmatrix} AC^q \\ AB^q \end{Bmatrix} = \overline{\text{sin. BAC}}^2 : \begin{cases} \overline{\text{sin. B}}^2 \\ \overline{\text{sin. ACB}}^2 \end{cases}$$

so erhält man hieraus

$$\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 + 1 - \frac{2AB}{AC} \times \frac{\text{Cosin. BAC}}{\text{sin. tot.}} : 1 = \overline{\text{sin. BAC}}^2 : \overline{\text{sin. B}}^2$$

$$\text{und } 1 + \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 - \frac{2AC}{AB} \times \frac{\text{Cosin. BAC}}{\text{sin. tot.}} : 1 = \overline{\text{sin. BAC}}^2 : \overline{\text{sin. ACB}}^2$$

$$\text{folglich sin. B} = \frac{\text{sin. BAC}}{\sqrt{1 + \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 - \frac{2AB}{AC} \times \frac{\text{Cosin. BAC}}{\text{sin. tot.}}}}$$

$$\text{sin. ACB} = \frac{\text{sin. BAC}}{\sqrt{1 + \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 - \frac{2AC}{AB} \times \frac{\text{Cosin. BAC}}{\text{sin. tot.}}}}$$

Daß bey der Berechnung selbst die Bestimmung des einen der beyden Winkel B oder ACB mittelst dieser Regeln hinreichend sey, erhellet von selbst aus I, 32. Und, wenn der gegebene Winkel ACB spiz ist; wird, der Zweydeutigkeit wegen, welche bey der Folgerung des Winkels aus seinen Sinus in Ansehung des größern Winkels ACB statt haben

kann (§. 14.), die Berechnung des der gegebenen kleineren Seite AC gegenüberliegenden Winkels B, welcher nothwendig spiz ist, vorzuziehen seyn.

§. 78.

Uebrigens hat diese Art die zwey andern Winkel des Dreyeks zu bestimmen, dieselben Unbequemlichkeiten, welche §. 62. bemerkt worden sind. Wenn man also nicht gerade die Sinus dieser Winkel zu wissen verlangt; so bieten die §. 62. ff. erklärten Säze folgende bequemere Methode dar.

Die Seiten CD, AD des bey D rechtwinklichten Dreyeks ADC, dessen Seite AC und der Winkel CAD (welcher entweder einerley mit dem gegebenen BAC, oder sein Supplement ist) gegeben sind, findet man mittelst der §. 75. u. f. schon angezeigten Proportionen:

$$\text{sin. tot.} : \begin{bmatrix}\text{sin. CAD}\\ \text{Cosin. CAD}\end{bmatrix} = AC : \begin{bmatrix}CD\\ AD.\end{bmatrix}$$

Alsdenn ist ferner

$$BD = \begin{cases}AB-AD, \text{ wenn der gegebene W. BAC spiz ist. } \textit{Fig.}\ 26.\\ AB+AD, \text{ wenn der gegeb. W. BAC stumpf ist. } \textit{Fig.}\ 27.\end{cases}$$

So sind in dem bey D rechtwinklichten Dreyek BDC die zwey Seiten CD, BD um den rechten Winkel bekannt; und die Aufgabe ist auf den vorhergehenden dritten Fall (§. 61.) zurükgeführt.

Namentlich ist (§. 64.)

$$BD : CD = \text{sin. tot.} : \text{Tang. B oder Cotg. BCD}$$

Und alsdenn

$$\text{der Winkel } ACB = \begin{cases}BCD+ACD & \textit{Fig.}\ 26.\\ BCD-ACD & \textit{Fig.}\ 27.\end{cases}$$

$$\text{wo (I, 32.) W. } ACD = \begin{cases}90^\circ-BAC & \textit{Fig.}\ 26.\\ BAC-90^\circ & \textit{Fig.}\ 27.\end{cases}$$

folglich allgemein

$$ACB = 90^\circ + BCD - BAC.$$

Oder kurz, wenn man den Winkel B bestimmt hat, ohne auf sein Complement BCD Rükssicht zu nehmen, ist der Winkel $ACB = 180^\circ - (BAC+B)$.

Alsdenn ergiebt sich auch die dritte Seite BC des Dreyecks durch eine der folgenden Proportionen

$$\left.\begin{matrix}\text{sin. BCD oder Cosin. B}\\ \text{sin. B}\end{matrix}\right] : \text{sin. tot.} = \left[\begin{matrix}\text{BD}\\ \text{CD}\end{matrix}\right] : \text{BC}$$

oder $\text{sin. tot.} : \left[\begin{matrix}\text{sec. B}\\ \text{Cosec. B}\end{matrix}\right] = \left[\begin{matrix}\text{BD}\\ \text{CD}\end{matrix}\right] : \text{BC}$ (§. 69. 73.)

§. 79.

1.) Beyspiel. *Fig.* 26.

AB = 168 R.
AC = 102
A = 49°25'

Lg. Cosin. A	= 9,8132829	
Lg. sin. A	= 9,8805052	
Lg. AC	= 2,0086002	AB = 168 R.
Lg. AD	= 1,8218831	AD = 66,356477
Lg. CD	= 1,8891054	BD = 101,643523
Lg. AB	= 2,2253093	
Lg. AB × CD	= 4,1144147	
Lg. AB × AD	= 4,0471924	
Lg. 2	= 0,3010300	
Lg. ΔABC	= 3,8133847	ΔABC = 6507,0582 Q. R.
Lg. 2AB × AD	= 4,3482224;	
Lg. CD sin. tot.	= 11,8891054	
Lg. BD	= 2,0070797,4	
Lg. Tg. B	= 9,8820256,6;	B = 37° 18' 42",82
Lg. AB	= 2,2253093	A = 49 25
Lg. AC	= 2,0086002	86 43 42,82
Lg. sin. A	= 9,8805052	179 59 60,00
Lg. AB sin. A	= 12,1058145	ACB = 93 16 17,18
Lg. AC sin. A	= 11,8891054	
Lg. sin. ACB	= 9,9992917	
Lg. sin. B	= 9,7825826	
Lg. BC	= 2,1065228 / 2,1065228	BC = 127,7976 R.

Oder nach §. 76. findet man BC auf folgende Art.

$AB^q = 28224$ Q. R.
$AC^q = 10404$
38628

Obiger Lg. $2AB \times AD$ gibt $2AB \times AD = 22295,7641$
folglich ist $BC^q = 16332,2359$
und $BC = 127,7976+$ Ruth.

Nach der zweyten Formel des 76. §. hat man

Lg. AB	= 2,2253093		
Lg. AC	= 2,0086002		
Lg. $\frac{AB}{AC}$	= 0,2167091	$\frac{AB}{AC}$	= 1,6470587+
Lg. $\frac{AC}{AB}$	= 9,7832909-10;	$\frac{AC}{AB}$	= 0,6071430-
Lg. $AB \times AC$	= 4,2339095		2,2542017
Lg. 0,9530951	= 9,9791362.4-10	$\frac{2\text{Cosin. A}}{\text{sin. tot.}}$	= 1,3011066
Lg. BC^q	= 4,2130457.4		0,9530951
Lg. BC	= 2,1065228.7	BC	= 127,79764-R.

Hieraus erhält man nach §. 77. die Sinus der Winkel B u. C.

Lg. AC	= 2,0086002		
Lg. AB	= 2,2253093		
Lg. sin. A	= 9,8805052		
Lg. AC sin. A	= 11,8891054		
Lg. AB sin. A	= 12,1058145		
Lg. BC	= 2,1065228.7		
Lg. sin. B	= 9,7825825.3	B =	37° 18′ 42″,79
Lg. sin. ACB	= 9,9992916.3.....		86 43 41 ,77
			179 59 60 ,00
		ACB =	93 16 18 ,23
		A =	49 25 0 ,00
			180 0 1 ,02

Oder. unmittelbar

Lg. $\left(\frac{AB}{AC}\right)$ = 0,2167091
Lg. Cosin. A = 9,8132829
Lg. 2 = 0,3010300
Lg. $\left(\frac{AB}{AC}\right)^2$ = 0,4334182; $\left(\frac{AB}{AC}\right)^2$ = 2,7128025
Lg. $\frac{2AB}{AC} \cdot \frac{\text{Cos. A}}{\text{sin. tot.}}$ = 0,3310220; $\frac{1}{3,7128025}$
Lg. 1,5698035 = 0,1958453 $\frac{2AB \text{ Cosin. A}}{AC \text{ sin. tot.}}$ = 2,1429990
Lg. $\sqrt{1,5698035}$ = 0,0979226.5 1,5098035
Lg. sin. A = 9,8805052
Lg. sin. B = 9,7825825.5 wie oben.

2.) Beyspiel. *Fig.* 27.

AB = 168 R.
AC = 102
BAC = 107°48'

Lg. sin. A = 9,9786969
Lg. Cosin. CAD = 9,4852888
Lg. AC = 2,0086002
Lg. CD = 1,9872962; AB = 168,
Lg. AD = 1,4938890; AD = 31,180928 +
Lg. AB = 2,2253093; BD = 199,180928
Lg. AB × CD = 4,2126055
Lg. AB × AD = 3,719 1983
Lg. 2 = 0,3010300 □R.
Lg. ΔABC = 3,9115755; ΔABC = 8157,8455
Lg. 2AB × CD = 4,0202283; 2AB × AD = 10476,8019
Lg. CD sin. tot. = 11,9872962
Lg. BD = 2,2992477.2
Lg. Tg. B = 9,6880484.8 BAC = 107°48' 0"
B = 25 59 35,06 -
133 47 35,06 -
179 59 60,00
ACB = 46 12 24,94 +

Lg. AB = 2,2253093
Lg. AC = 2,0086002
Lg. sin. A = 9,9786960
Lg. AB sin. A = 12,2040053
Lg. sin. ACB = 9,8584432.8
Lg. AC sin. A = 11,9872962
Lg. sin. B = 9,6417342.6
Lg. BC = {2,3455620.2 / 2,3455619.4} BC = 221,5960 R.

AB^q = 28224
AC^q = 10404
$2AB \times AD$ = 10476,8019
BC^q = 49104,8019
BC = 221,5960 R.

Lg. AB = 2,2253093
Lg. AC = 2,0086002
Lg. $\frac{AB}{AC}$ = 0,2167091 $\frac{AB}{AC}$ = 1,6470587+
Lg. $\frac{AC}{AB}$ = 9,7832909 $\frac{AC}{AB}$ = 0,6071430-
Lg. $AB \times AC$ = 4,2339095 $\frac{2\text{Cosin.CAD}}{\text{sin. tot.}}$ = 0,6113906
Lg. (2,865....) = 0,4572144.3 2,8655923
Lg. BC^q = 4,6911239.3
Lg. BC = 2,3455619.6
BC = 221,5960 R.

Anmerkung.

Man hat nach den Formeln des 77. §. für das erste der vorhergehenden Dreyeke gefunden B = 37° 18′ 42″,79 und dem Lg. sin. ACB entspricht in den Tafeln der Winkel 86° 43′ 41″,77. Diese zwey Winkel aber machen mit dem gegebenen Winkel A = 49° 25′, weniger als 2 rechte, folglich muß statt eines der zwey Winkel B, ACB, sein Supplement genommen werden, zu welchem derselbe Lg. sin. gehört (§. 14.). Da aber AB > AC, so muß (I, 18.) C > B

seyn. Folglich ist ACB = 180° - (86° 43' 41",77), = 93° 16' 18",23. Es machen aber jezt die drey Winkel zusammen 1",02 mehr als 180°; folglich ist einer der berechneten Winkel, oder beyde, etwas zu gros, und zwar ist der Winkel ACB am meisten verdächtig, weil sein Log. sin. sich in der lezten Ziffer nur um 1,2 ändert, wenn sich der Winkel um 1 Sek. ändert, und man sich auf die lezte Ziffer der Logarithmen nicht immer verlassen kann; besonders wenn, welches hier der Fall ist, Uebergänge von Logarithmen auf Zahlen und von diesen wieder auf jene gemacht werden.

§. 80.

Eine andere Methode die übrigen Winkel des Dreyecks zu berechnen gründet sich auf die Bemerkung: daß mit dem Winkel BAC zugleich die Summe der zwey andern ACB und B (I, 32) gegeben ist; folglich nur ihr Unterschied erfordert wird, um jeden besonders angeben zu können.

Wenn nämlich z. B. zwey Zahlen verlangt werden, die zusammen 124 ausmachen, und deren grössere die kleinere um 32 übertreffen soll; so erhellet sogleich: daß jede derselben $62 = \frac{124}{2}$ seyn würde, wenn kein Unterschied zwischen ihnen Statt haben sollte; und daß, welcher Unterschied zwischen denselben verlangt werden mag, die grössere die Zahl 62 genau um eben soviel übertreffen müsse, als der kleineren zu 62 fehlt, damit sie beständig die Summe 2 . 62 oder 124 ausmachen. Alsdenn aber ist die eine von der andern um das doppelte dessen verschieden, um was jede derselben von 62 verschieden ist. Folglich wird ihr Unterschied, wie verlangt wird, 32 seyn: wenn die grössere die Zahl 62 um $16 = \frac{32}{2}$ übertrift, und der kleineren dieselbe Zahl $16 = \frac{32}{2}$ zu 62 fehlt. Die zwey gesuchten Zahlen werden also seyn:

die grössere = 62 + 16 = 78
die kleinere = 62 - 16 = 46

und wirklich ist alsdenn ihre Summe = 2 × 62 = 124
" " " " ihr Unterschied = 2 × 16 = 32

Ebenso, wenn zwey gerade Linien verlangt werden, deren Summe AB und Unterschied DF (*Fig.* 28) gegeben ist, würden, wenn man die Summe AB in C halbirt, die gesuchten Linien AC, BC seyn, wenn sie nicht von einander unterschieden seyn sollten: und, um welche Länge sie auch von einander unterschieden seyn sollen; muß die größere die AC übertreffen um dieselbe Länge, welche der kleineren zu BC fehlt, damit sie zusammen genommen immer = AB seyen. Alsdenn wird aber die größere die kleinere um das doppelte dessen übertreffen, um was jede derselben von $\frac{1}{2}$AB verschieden ist. Halbirt man also ihren gegebenen Unterschied DF in E; und macht man CG = EF: so werden AG, BG die gesuchten geraden Linien seyn. Sie machen die gegebene Summe AB aus, nach der Construktion selbst. Ihr Unterschied aber ist der gegebenen geraden Linie DF gleich. Denn macht man CL = ED = EF = CG, und folglich LG = DF:

so wird, weil auch AC = BC ist,

AL = BG;

folglich AG - BG = AG - AL = LG = DF.

Allgemein. Wenn a, b zwey ungleiche Größen von einerley Art bezeichnen, deren Summe s und Unterschied d gegeben ist; sind

$$\frac{1}{2}s = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$$
$$\frac{1}{2}d = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$$

folglich $\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}d = \begin{cases} \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b \\ a \end{cases}$

$$\frac{1}{2}s - \frac{1}{2}d = \begin{cases} \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - (\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b) = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \\ b \end{cases}$$

(§. 42.)

d. i. wenn die Summe und der Unterschied zweyer gleichartigen Größen gegeben sind; so findet man die größere, wenn man zu ihrer halben Summe ihren halben Unterschied addirt, und die kleinere, wenn man von ihrer halben Summe ihren halben Unterschied abzieht.

§. 81.

Da nun, wenn ein Winkel irgend eines Dreyeks gegeben ist, die Summe der zwey übrigen Winkel gegeben ist (I, 32.); so wird die Bestimmung dieser Winkel darauf zurükgeführt, daß man ihren Unterschied suche.

Um dieses deutlich zu zeigen; wollen wir sowohl die gegebene Summe als die zu suchende Differenz der in der Aufgabe §. 75. gesuchten Winkel; und auch ihre Hälften verzeichnen (*Fig.* 29. 30.).

Die gegebene Summe der Winkel ACB und B stellt (I, 32.) der äussere Winkel CAF des Dreyeks dar, welchen man erhält, wenn man eine der gegebenen Seiten, z. B. die größere BA, nach Belieben auf der entgegengesezten Seite des gegebenen Winkels BAC verlängert. Verlängert man aber diese Seite BA so, daß AF der anderen gegebenen Seite AC gleich wird; und zieht man die gerade Linie CF, so wird zugleich, wenn man den Winkel CAF = ACB + B halbirt, folglich die Winkel $\left\{\begin{matrix}\text{FAE}\\\text{CAE}\end{matrix}\right\} = \frac{\text{ACB}+\text{B}}{2}$ macht, die Grundlinie CF des gleichschenklichten Dreyeks FAC durch die gerade Linie AE senkrecht und in zwey gleiche Teile getheilt (I, 4.).

Ferner wird der Winkel CAF = ACB + B in zwey den Winkeln ACB, B beziehungsweise gleiche Winkel getheilt; wenn man durch den Scheitelpunkt A die gerade Linie AG mit der dritten Seite BC des Dreyeks parallel zieht. Alsdenn sind nämlich (I, 29.) die Winkel $\left\{\begin{matrix}\text{CAG}=\text{ACB};\\\text{FAG}=\text{B}.\end{matrix}\right.$

Da nun der Winkel CAG ihre halbe Summe um den Winkel GAE übersteigt, und dem Winkel FAG derselbe Winkel GAE zu ihrer halben Summe FAE fehlt; so ist vermöge §. 80. GAE der halbe Unterschied dieser Winkel, oder der ihnen gleichen ACB und B.

Ebendiß wird in gegenwärtigem Fall anschaulich gezeigt, wenn man EH = EG nimmt, und die gerade Linie

AH zieht. Alsdenn ist nämlich

der Winkel HAE = GAE (I, 4.)

da nun auch der W. CAE = FAE (Constr.)

so ist der W. CAH = FAG = B

mithin der Winkel $GAH = \begin{cases} CAG - CAH \\ ACB - B \end{cases}$

und die Winkel $\left\{\begin{matrix} GAE \\ HAE \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}GAH = \frac{ACB - B}{2}$

Hieraus erhellt nun ferner, daß, übereinstimmend mit der Regel §. 80.

d. W. $ACB = CAG = CAE + GAE = \frac{ACB + B}{2} + \frac{ACB - B}{2}$

und d. W. $B = FAG = FAE - GAE = \frac{ACB + B}{2} - \frac{ACB - B}{2}$

Da AE auf FC senkrecht ist: so sind die Segmente EF, EG der leztern die Tangenten der Winkel FAE, GAE, für den Halbmesser AE; und allgemein EF : EG = Tang. FAE : Tang. GAE für irgend einerley Halbmesser. (§. 63.)

Die Bestimmung des halben Unterschieds GAE der Winkel ACB und B ist mithin darauf zurükgeführt, daß man das Verhältniß suche, welches die geraden Linien FE, GE; oder ihre doppelten FC, GH; d. h. die Summe und der Unterschied der geraden Linien CG und FG zu einander haben. Denn es ist

CE = FE (Bew.)

und EH = EG (Constr.)

folglich CH = FG

und daher GH = CG - CH = CG - FG.

Nun ist aber die gerade Linie AG mit der Seite BC parallel gezogen; daher (VI, 2.)

$$AB : \left\{\begin{matrix} AF \\ AC \end{matrix}\right\} = CG : FG$$

folgl. auch (V, 17. 18. 22.)

$$AB + AC : AB - AC = \begin{cases} CG + FG : CG - FG \\ CF : GH \\ EF : EG \text{ (V, 15.)} \\ \text{Tang. FAE} : \text{Tang. GAE (V, 11.)} \end{cases}$$

d. h. die Summe der gegebenen Seiten AB, AC des Dreyeks verhält sich zu ihrem Unterschied; wie die Tangente der gegebenen halben Summe der übrigen zwey Winkel des Dreyeks ACB und B, zu der Tangente ihres halben Unterschieds.

So ergiebt sich mittelst der Tangententafel der halbe Unterschied dieser Winkel: und alsdenn der größere ACB, welcher der gegebenen größeren Seite AB gegenüber liegt, wenn man den halben Unterschied zu der halben Summe addirt; und der kleinere B, welcher der gegebenen kleineren Seite AC gegenüber liegt, wenn man den halben Unterschied von der halben Summe abzieht.

§. 82.

Die §. 81. gefundene Proportion läßt sich auch aus folgender Construktion herleiten. Man verlängere wiederum die gegebene größere Seite AB (*Fig.* 31. 32.) des Dreyeks, bis AF der gegebenen kleineren AC gleich ist; beschreibe aus A als Mittelpunkt mit dem Halbmesser AC = AF einen Halbzirkel, welcher die Seite AB in K schneide; und ziehe die geraden Linien CF, CK.

So sind $FB = AB + AC$; $BK = AB - AC$

$CAF = ACB + ABC$ (I, 32.);

$CKF = \frac{1}{2}CAF$ (III, 20.) $= \frac{ACB + ABC}{2}$.

und KC ist auf CF senkrecht, weil der Winkel FCK im Halbkreis ein rechter ist (III, 31.). Ferner ziehe man BL parallel mit KC durch den Punkt B, bis sie die verlängerte FC in L trift. So ist (I, 29.) auch BL senkrecht auf FL, und der Winkel $FBL = FKC = \frac{ACB + ABC}{2}$.

Da nun dem kleineren Winkel ABC zur halben Summe FBL der Winkel CBL fehlt; so ist dieser der halbe Unterschied der Winkel (§. 80.), oder

$$CBL = \frac{ACB - ABC}{2}$$

Endlich sind FL und CL, als auf der geraden Linie BL

senkrecht, die Tangenten der Winkel FBL, CBL, für den Halbmesser BL; und allgemein

$$FL : CL = \text{Tang. } FBL : \text{Tang. } CBL$$

für irgend einerley Halbmesser (§. 63.)

Aber wegen der Parallellinien CK, BL ist (VI, 2.)

$$FB : BK = FL : CL$$

folglich auch $FB : BK = \text{Tang. } FBL : \text{Tang. } CBL$ (V, 11.)

d.i. $AB+AC : AB-AC = \text{Tang.} \frac{ACB+ABC}{2} : \text{Tang.} \frac{ACB-ABC}{2}$.

§. 83.

Es wird nicht undienlich seyn, noch den Zusammenhang dieser Proportion mit der Fundamental-Proportion der Trigonometrie (§. 10. 13.) zu zeigen. Der leztern zufolge ist (*Fig.* 26. 27.)

$$AB : AC = \sin. ACB : \sin. B$$

mithin (V, 17. 18. 22.)

$$AB+AC : AB-AC = \sin. ACB + \sin. B : \sin. ACB - \sin. B.$$

Man mache (*Fig.* 33.) die Winkel $ECF = ACB$, $ECG = B$, beschreibe aus C als Mittelpunkt mit irgend einem Halbmesser CE zwischen den Schenkeln des Winkels FCG den Kreisbogen FEG; und halbire denselben in L.

So sind die Winkel $\left\{\begin{matrix} FCL \\ GCL \end{matrix}\right\} = \frac{ECF+ECG}{2}$;

und $ECL = \frac{ECF-ECG}{2}$,

als Ueberschuß des größern ECF über die halbe Summe FCL, und Ueberschuß der halben Summe GCL über den kleinern ECG (§. 80.).

Aus den Punkten F, G fälle man auf den Halbmesser CE die Perpendikel FK, GJ; welche die Sinus der Winkel ECF, ECG, für den Halbmesser CE seyn werden (§. 11.): auf dem Halbmesser CL aber erreichte man in seinem Endpunkt L das Perpendikel MLO; welches den verlängerten Halbmessern CF, CE, CG in den Punkten M, N, O begegne: so werden (§. 63.) LM = LO (I, 26.) und LN die Tangenten der halben Summe FCL = GCL, und der halben Differenz ECL der Winkel ECF, ECG, für denselben Halbmesser CE = CL seyn.

Und allgemein $FK : GJ = \sin. ECF : \sin. ECG$ (§. 11.)

$$LM : LN = \text{Tang. } FCL : \text{Tang. } ECL$$

$$= \text{Tg.} \frac{ECF + ECG}{2} : \text{Tg.} \frac{ECF - ECG}{2}$$

(§. 63.)

Zieht man nun die Chorde FG, welche der Tangente MLO parallel seyn wird (III, 27. Schol.):

so ist $FK : GJ = \begin{cases} FH : GH & \text{VI, 4.} \\ MN : NO & \text{(VI, 4. V, 11. 16.)} \end{cases}$

folgl. (V, 11.) $\sin. ECF : \sin. ECG = MN : NO$

und (V, 17. 18. 22.)

$$\sin. ECF + \sin. ECG : \sin. ECF - \sin. ECG =$$

$$= \begin{cases} MN + NO & : MN - NO \\ MO & : 2LN \quad (\S. 80.) \\ LM & : LN \quad (V, 15.) \\ \text{Tg.} \frac{ECF + ECG}{2} & : \text{Tg.} \frac{ECF - ECG}{2} \end{cases}$$

oder (*Fig.* 26. 27.)

$$\left.\begin{array}{l} \sin. ACB + \sin. B : \sin. ACB - \sin. B \\ \text{folglich auch (V, 11.)} \\ AB + AC : AB - AC \end{array}\right\} = \text{Tg.} \frac{ACB + B}{2} : \text{Tg.} \frac{ACB - B}{2}$$

§. 84.

Wenn die Seiten AB, AC des Dreyeks nicht selbst, sondern ihre Logarithmen durch eine vorhergehende Rechnung unmittelbar gegeben sind: so wendet man, statt der vorhergehenden Art den halben Unterschied der übrigen zwey Winkel zu berechnen, folgende in diesem Fall bequemere an.

Von der gröſseren Seite AB (*Fig.* 34.) sey das Stük AK = der gegebenen kleineren Seite AC abgeschnitten, so daß BK = AB - AC: und auf eben derselben Seite AB sey in A das Perpendikel AR ebenfalls = AC errichtet. Zieht man nun die gerade Linie RK, und fällt auf ihre Verlängerung aus dem Punkt B das Perpendikel BS; welches auf die entgegengesezte Seite verlängert, der durch R mit AB parallelen RQ in dem Punkt Q begegnet; fällt endlich aus dem Punkt B das Perpendikel BV auf RQ: so sind die Winkel

ARK, AKR, BKS, SBK, BQV, QBV jeder = $\frac{1}{2}$ rechten (I, 5. 32. 15. 29.)

die geraden Linien

SK = BS (I, 6.); QV = BV (I, 6.) = AR (I, 34.) = AC

folglich $\frac{RV}{RQ} = \frac{AB (I,34.)}{AB+AC}$;

und (VI, 4.) RQ : BK } = RS : SK oder BS
oder AB + AC : AB - AC }

Nun aber ist, wenn man die gerade Linie RB zieht

RS : BS = sin. tot. : Tg. BRS (§. 64.)

also (§. 81. f. u. V, 11.)

sin. tot. : Tang. BRS = Tang. $\frac{ACB+ABC}{2}$: Tg. $\frac{ACB-ABC}{2}$

Es ist aber der Winkel BRS gegeben: denn er ist um

einen halben rechten verschieden von dem Winkel ARB, welchen die Proportion bestimmt

$$\left.\begin{matrix}AR\\AC\end{matrix}\right\} : AB = \text{sin. tot.} : \text{Tang. } ARB \quad (\S.\ 64.)$$

Hat man also mittelst dieser Proportion den Winkel ARB berechnet; so schließt man hernach

$$\text{sin. tot.} : \text{Tg.}(ARB - 45°) = \text{Tg.}\frac{ACB + ABC}{2} : \text{Tg.}\frac{ACB - ABC}{2}$$

§. 85.

Bey den vorhergehenden Proportionen verdient noch folgendes bemerkt zu werden. Da (*Fig.* 29. 30.) die Winkel F, AGE die Complemente der Winkel FAE, GAE sind; so ist (§. 63. 81.) $EF : EG = \text{Cotg. } F : \left\{\begin{matrix}\text{Tg. GAE}\\\text{Cotg. AGE.}\end{matrix}\right.$

Ebenso ist (*Fig.* 31. 32.) vermöge §§. 63. 82.

$$FL : CL = \text{Cotg. } F : \left\{\begin{matrix}\text{Tg. CBL}\\\text{Cotg. BCL}\end{matrix}\right.$$

Nun sind der Winkel $F = \frac{1}{2}BAC$ (I, 5. 32. od. III, 20.) und die W. $\left\{\begin{matrix}AGE = F + FAG\\BCL = F + FBC\end{matrix}\right\}$ (I, 32.) $= \frac{1}{2}BAC + ABC$

folglich ist auch nach dem §. 81. 82. 84. bewiesenen

$$\left.\begin{matrix}AB + AC : AB - AC\\\text{od. (}\textit{Fig.}\text{ 34.)}\\\text{sin. tot.} : \text{Tg.}(ARB - 45°)\end{matrix}\right] = \text{Cotg. } \tfrac{1}{2}BAC : \text{Tg.}\frac{ACB - ABC}{2}$$

$$\left.\begin{matrix}\text{oder } AB + AC : AB - AC\\\text{und ebenso}\\\text{sin. tot.} : \text{Tg.}(ARB - 45°)\end{matrix}\right] = \text{Cotg. } \tfrac{1}{2}BAC : \text{Cotg. } (\tfrac{1}{2}BAC + ABC)$$

daher auch (§. 65. 66.)

$$\left.\begin{matrix}AB - AC : AB + AC\\\text{und ebenso Tg.}(ARB - 45°) : \text{sin. tot.}\\\text{oder sin. tot.} : \text{Cotg.}(ARB - 45°)\end{matrix}\right] =$$

$$= \text{Tang. } \tfrac{1}{2}BAC : \text{Tang. } (\tfrac{1}{2}BAC + ABC)$$

Wird nun durch eine dieser leztern Proportionen der Winkel $\frac{1}{2}BAC + ABC$ bestimmt: so erhält man, wenn man von ihm den Winkel $\frac{1}{2}BAC$ abzieht, unmittelbar den Winkel ABC des vorgegebenen Dreyeks, welcher der kleineren Seite AC des Dreyeks gegenüber liegt; und alsdenn ist der grössere Winkel $ACB = 180° - (BAC + ABC)$.

§. 86.

Hat man die Winkel ACB, B (*Fig.* 26. 27.) nach irgend einer der bisher §§. 80. u. f. erklärten Methoden berechnet; so erhält man umgekehrt die dritte Seite BC des Dreyeks durch eine der zwey Proportionen (§. 77.)

$$\left.\begin{matrix}\sin. B \\ \sin. ACB\end{matrix}\right\} : \sin. BAC = \left\{\begin{matrix}AC \\ AB\end{matrix}\right\} : BC;$$

und die nach beyden Proportionen angestellte Berechnung wird den vorhergehenden Operationen zur Probe dienen.

§. 87.

Die Berechnung der dritten Seite BC des Dreyeks nach §. 86. ist zwar gemeiniglich in mehrerem Betracht bequemer als die nach der Vorschrift der erstern Formel §. 76. anzustellende. Sie verwickelt aber in überflüssige Umschweife, wenn es blos darum zu thun ist, die Seite BC, und nicht zugleich die übrigen Winkel des Dreyeks zu kennen. Alsdenn ist die auf folgende Schlüsse sich gründende Art schiklicher.

Die nämliche Construction wie §. 82. vorausgesezt, beschreibe man (*Fig.* 31. 32.) über dem Durchmesser $BF = AB + AC$ einen Halbzirkel; welcher, wegen des rechten Winkels FLB, durch den Punkt L gehen wird (III, 31. Schol. 1.) Alsdenn beschreibe man aus B als Mittelpunkt mit dem Halbmesser BC einen Bogen: welcher, da $BC < AB + AC$ (I, 20.) oder BF, und $> BL$ (I, 19.), sowohl den Halbzirkel FLB, als die verlängerte FL irgendwo schneiden wird,

wie in den Punkten J, M; und zwar die leztere so, daß CL = CM (III, 3.). Zieht man ferner die geraden Linien BJ, FJ: so wird BJ = BC seyn; und FJ, wegen des rechten Winkels FJB (III, 31.), den Bogen CJM in dem Punkt J berühren. (III, 16.)

daher $FJ^q = \begin{cases} FM \times FC & \text{(III, 36.)} \\ FL^q - CL^q & \text{(II, 6.)} \end{cases}$

Es ist aber (VI, 2.) FL : CL = FB : BK

folglich $FL^q : CL^q = FB^q : BK^q$ (VI, 22.)

$$FL^q : \begin{cases} FL^q - CL^q \\ FJ^q \end{cases} = FB^q : \begin{cases} FB^q - BK^q \text{ (V, 17.)} \\ 4AB \times AK \text{ (II, 8.)} \end{cases}$$

und $FL : FJ = \begin{cases} FB & : 2\sqrt{AB \times AK} \\ AB + AC & : 2\sqrt{AB \times AC} \end{cases}$

Das Verhältniß FL zu FJ ist demnach gegeben.

Aber $\frac{1}{2}FL$, $\frac{1}{2}FJ$ sind die Sinus der Winkel FBL, FBJ in dem Kreis, dessen Durchmesser FB (§. 11.) und allgemein (§. 12.)

$$\text{oder (V, 15.)} \begin{matrix} \frac{1}{2}FL : \frac{1}{2}FJ \\ FL : FJ \end{matrix} \Big\} = \text{sin. FBL} : \text{sin. FBJ} =$$

$$= \begin{cases} \text{Cosin. BFL} \\ \text{Cosin. } \frac{1}{2}\text{BAC} \end{cases} : \text{Cosin. BFJ (§. 31.)}$$

$$\text{Also } \begin{matrix} AB+AC : 2\sqrt{AB \times AC} \\ \frac{AB+AC}{2} : \sqrt{AB \times AC} \end{matrix} \Big\} = \text{Cosin. } \tfrac{1}{2}\text{BAC} : \text{Cosin. BFJ}$$

d. i. die mittlere arithmetische Proportionallinie zwischen den gegebenen Seiten AB, AC des Dreyeks verhält sich zu ihrer mittleren geometrischen Proportionallinie, wie der Cosinus der Hälfte des gegebenen zwischen den gegebenen Seiten liegenden Winkels BAC zu dem Cosinus des Winkels BFJ. Dieser Winkel BFJ ist daher gegeben.

Und nun ist in dem bey J rechtwinklichten Dreyek BJF

$$\text{sin. tot.} : \text{sin. BFJ} = \begin{cases} BF : BJ \\ AB + AC : BC \end{cases}$$

d. h. die dritte Seite BC des Dreyecks verhält sich zur Summe der zwey gegebenen AB und AC, wie der Sinus des gefundenen Winkels BFJ zum Sinus totus.

§. 88.

Aus der vorhergehenden Construktion ergeben sich noch folgende Ausdrüke des Quadrats der dritten Seite BC unmittelbar aus den gegebenen Stüken, welche etwas geschneidiger sind als der in §. 76. Da nemlich nach dem vorhergehenden §.

$$\text{d. i. (§. 31.)} \left.\begin{matrix} FB^q : FL^q \\ \overline{\text{sin. tot.}}^2 : \overline{\text{Cosin. BFL}}^2 \\ \text{oder } \overline{\text{sin. tot.}}^2 : \overline{\text{Cos. } \tfrac{1}{2}\text{BAC}}^2 \end{matrix}\right\} = \begin{cases} 4AB \times AK \\ 4AB \times AC \end{cases} : FJ^q$$

$$\text{folglich } FJ^q = 4AB \times AC \left(\frac{\text{Cosin. } \frac{1}{2}\text{BAC}}{\text{sin. tot.}}\right)^2$$

$$\text{und } BC^q = BJ^q = FB^q - FJ^q = (AB + AC)^q - FJ^q$$

$$\text{so ist } BC^q = (AB + AC)^q - 4AB \times AC \left(\frac{\text{Cosin. } \frac{1}{2}\text{BAC}}{\text{sin. tot.}}\right)^2$$

Zweytens, weil $CL : BK = FL : FB$

folglich auch $CL^q : BK^q = FL^q : FB^q$

$$BK^q - CL^q : BK^q = \begin{cases} FB^q - FL^q \\ BL^q \end{cases} : FB^q$$

also ferner

$$\left.\begin{matrix} BL^q - (BK^q - CL^q) \\ BL^q - BK^q + CL^q \\ BC^q - BK^q \end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix} FB^q - BK^q \\ 4AB \times AK \\ 4AB \times AC \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} BL^q : FB^q \\ \overline{\text{sin. BFL}}^2 : \overline{\text{sin. tot.}}^2 \\ \overline{\text{sin. } \tfrac{1}{2}\text{BAC}}^2 : \overline{\text{sin tot.}}^2 \end{matrix}\right.$$

$$\text{so ist } \left.\begin{matrix} BC^q - BK^q \\ BC^q - (AB - AC)^q \end{matrix}\right\} = 4AB \times AC \left(\frac{\text{sin. } \frac{1}{2}\text{BAC}}{\text{sin. tot.}}\right)^2$$

$$\text{und } BC^q = (AB - AC)^q + 4AB \times AC \left(\frac{\text{sin. } \frac{1}{2}\text{BAC}}{\text{sin. tot.}}\right)^2$$

§. 89.

Noch wird es sich der Mühe verlohnen, die §. 78. vorgetragene Methode die übrigen Winkel des Dreyeks zu berechnen auf Regeln zurükzuführen, welche nur die gegebenen Größen selbst enthalten. (*Fig.* 26. 27.)

Da zufolge (§. 78.)

$$CD = \frac{\text{sin. CAD}}{\text{sin. tot.}} AC = \frac{\text{sin. BAC}}{\text{sin. tot.}} AC \text{ (§. 14.)}$$

$$AD = \frac{\text{Cosin. CAD}}{\text{sin. tot.}} AC$$

$$BD = \begin{cases} AB - AD = AB - \frac{\text{Cosin. CAD}}{\text{sin. tot.}} AC & \textit{Fig.}\ 26. \\ AB + AD = AB + \frac{\text{Cosin. CAD}}{\text{sin. tot.}} AC & \textit{Fig.}\ 27. \end{cases}$$

$$= AB - \frac{\text{Cosin. BAC}}{\text{sin. tot.}} AC \text{ (§. 42. ff.)}$$

so verwandelt sich die Proportion $BD : CD = \text{sin. tot.} : \text{Tg. B}$ (§. 78.) in folgende

$$\left.\begin{array}{l} AB - \frac{\text{Cosin. BAC}}{\text{sin. tot.}} AC : \frac{\text{sin. BAC}}{\text{sin. tot.}} AC \\ \frac{AB}{AC} - \frac{\text{Cosin. BAC}}{\text{sin. tot.}} : \frac{\text{sin. BAC}}{\text{sin. tot.}} \\ \text{od. } 1 - \frac{\text{Cosin. BAC}}{\text{sin. tot.}} \times \frac{AC}{AB} : \frac{\text{sin. BAC}}{\text{sin. tot.}} \times \frac{AC}{AB} \end{array}\right\} = \text{sin. tot.} : \text{Tang. B.}$$

Daher $\text{Tang. B} = \dfrac{\frac{\text{sin. BAC}}{\text{sin. tot.}}}{\frac{AB}{AC} - \frac{\text{Cosin. BAC}}{\text{sin. tot.}}}$

$$= \frac{\frac{AC}{AB} \text{sin. BAC}}{1 - \frac{AC}{AB} \times \frac{\text{Cosin. BAC}}{\text{sin. tot.}}}$$

§. 90.

Eben diese Stüke können zur Bestimmung des Winkels B so gebraucht werden: (*Fig.* 26. 27.)

$CD : BD = \text{sin. tot.} : \text{Tang. BCD od. Cotg. B}$ (§. 64.)

folglich $\text{Cotg. } B = \frac{BD}{CD} \text{ sin. tot.}$

$$= \begin{cases} \frac{AB-AD}{CD} \text{ sin. tot.} & \textit{Fig. 26.} \\ \frac{AB+AD}{CD} \text{ sin. tot.} & \textit{Fig. 27.} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{AB}{CD} \text{ sin. tot.} - \frac{AD}{CD} \text{ sin. tot.} & \textit{Fig. 26.} \\ \frac{AB}{CD} \text{ sin. tot.} + \frac{AD}{CD} \text{ sin. tot.} & \textit{Fig. 27.} \end{cases}$$

aber $\text{sin. tot.} : \begin{Bmatrix} \text{sec. ACD} \\ \text{Tang. ACD} \end{Bmatrix} = CD : \begin{cases} AC \ (\S. 69.) \\ AD \ (\S. 64.) \end{cases}$

folglich $\frac{\text{sin. tot.}}{CD} = \frac{\text{sec. ACD}}{AC}$; und $\frac{AD \text{ sin. tot.}}{CD} = \text{Tg. ACD}$

Daher $\text{Cotg. } B = \begin{cases} \frac{AB}{AC} \text{ sec. ACD} - \text{Tang. ACD} & \textit{Fig. 26.} \\ \frac{AB}{AC} \text{ sec. ACD} + \text{Tang. ACD} & \textit{Fig. 27.} \end{cases}$

$$= \begin{cases} \frac{AB}{AC} \text{ Cosec. BAC} - \text{Cotg. BAC} & \textit{Fig. 26.} \\ \frac{AB}{AC} \text{ Cosec. CAD} + \text{Cotg. CAD} & \textit{Fig. 27.} \end{cases}$$

§. 91.

Anwendung der bisher erklärten Berechnungsmethoden auf die Beyspiele. §. 79.

1.) (*Fig. 26.*)

$AB = 168 \text{ R.}$
$AC = 102$
$AB+AC = 270$
$AB-AC = 66$

Lg. Tg. $\frac{1}{2}$ Summe	= 10,3371243	A	= 49 25
Lg. (AB-AC)	= 1,8195439	$\frac{1}{2}$A	= 24 $42\frac{1}{2}$
	12,1566682	ACB+B	= 130 35
Lg. (AB+AC)	= 2,4313638	$\frac{ACB+B}{2}$	= 65 17 30
Lg. Tg. $\frac{1}{2}$ Unterſch.	= 9,7253044	$\frac{ACB-B}{2}$	= 27 58 47,18
		ACB	= 93 16 17,18
		B	= 37 18 42,82

Log. sin. A = 9,8805052

Lg. AB = 2,2253093

Lg. AC = 2,0086002

Lg. AB sin. A = 12,1058145

Lg. AC sin. A = 11,8891054

Lg. sin. ACB = 9,9992917

Lg. sin. B = 9,7825826

Lg. BC = $\left\{\begin{matrix}2,1065228\\2,1065228\end{matrix}\right\}$ $BC = 127,7976+$

Lg. $AB \times AC$ = 4,2339095

Lg. $\sqrt{AB \times AC}$ = 2,1169547.5

Lg. 2 = 0,3010300

Lg. Cosin. $\frac{1}{2}A$ = 9,9582998

12,3762845.5

Lg. $(AB+AC)$ = 2,4313638

Lg. Cosin. BFJ = 9,9449207.5 $BFJ = 28°15'1'',1$

Lg. sin. BFJ = 9,6751589

Lg. BC = 2,1065227 $BC = 127,7976-$

Lg. $AB \times AC$ = 4,2339095

Lg. 4 = 0,6020600

Lg. $\left(\frac{\text{Cosin. } \frac{1}{2}A}{\text{sin. tot.}}\right)^2$ = 0,9165996-1

4,7525691

Lg. $\frac{AB}{AC}$ = 0,2167091

Lg. Cosec. A = 10,1194948

Lg. $\frac{AB}{AC}$ Cosec. A = 10,3362039

$4AB \times AC \left(\frac{\text{Cosin. } \frac{1}{2}A}{\text{sin. tot.}}\right)^2 = 56567,7791-$

$(AB+AC)^2 = 72900,0000$

$BC^2 = 16332,2209$

$BC = 127,7976-$

$\frac{AB}{AC}$ Cosec. $A = 21687220$

Cotg. A = 8565992

Cotg. B = 13121228

$B = 37°18'42'',8-$

2.) (*Fig.* 27.)

AB = 168 R.
AC = 102
AB+AC = 270
AB-AC = 66

BAC = 107 48 0
½BAC = 53 54 0
ACB+B = 72 12 0
$\frac{ACB+B}{2}$ = 36 6 0
$\frac{ACB-B}{2}$ = 10 6 24,95-
ACB = 46 12 24,95-
B = 25 59 35,05+

Lg. Tg. ½ Summe = 9,8628541
Lg. (AB-AC) = 1,8195439
11,6823980
Lg. (AB+AC) = 2,4313638
Lg. Tg. ½ Untsch. = 9,2510342
Lg. AB = 2,2253093
Lg. AC = 2,0086002
Log. sin. A = 9,9786960
Lg. AB sin. A = 12,2040053
Lg. AC sin. A = 11,9872962
Lg. sin. ACB = 9,8584433
Lg. sin. B = 9,6417342
Lg. BC = {2,3455620 / 2,3455620} BC = 221,59602
Lg. AB × AC = 4,2339095
Lg. $\sqrt{AB \times AC}$ = 2,1169547.5
Lg. 2 = 0,3010300
Lg. Cosin. ½BAC = 9,7702601
12,1882448.5
Lg. (AB+AC) = 2,4313638
Lg. Cosin. BFJ = 9,7568810. BFJ = 55°9' 27",1 +
Lg. sin. BFJ = 9,9141981.8
Lg. BC = 2,3455619.8 BC = 221,59601 +
Lg. $\frac{AB}{AC}$ = 0,2167091
Lg. Cosec. CAD = 10,0213040
Lg. $\frac{AB}{AC}$ Cosec. CAD = 10,2380131 $\frac{AB}{AC}$ Cosec. CAD = 17298685.25
Cotg. CAD = 3210649
Cotg. B = 20509334.25
B = 25°59' 35",06 -

Anmerkungen über diese Berechnungen.

1.) Man hat bey der Berechnung der beyden vorhergehenden Beyspiele die Größe des Hülfswinkels BFJ angegeben. Uebrigens ist dieß nicht nöthig, und man kann unmittelbar von seinem gefundenen Log. Cosinus zu seinem zur Fortsezung der Rechnung erforderlichen Log. Sinus übergehen, und diesen so genau, als die Tafeln gestatten, bestimmen, wenn es nöthig ist.

So fällt in dem ersten Beyspiel

$$\text{Log. Cosin. BFJ} = 9{,}9449207.5 \text{ zwischen } \begin{cases} \text{Log. Cos. } 28°15' = 9{,}9449220 \\ \text{Log. Cos. } 28\ 16 = 9{,}9448541 \\ \text{Unterſch.} = 679 \end{cases}$$

$$\text{Unterſch.} = 12{,}5 \quad (9220)$$

$$\text{folglich fällt Log. sin. BFJ zwiſchen } \begin{cases} \text{Log. sin. } 28°15' = 9{,}6751546 \\ \text{Log. sin. } 28\ 16 = 9{,}6753896 \\ \text{Unterſch.} = 2350 \end{cases}$$

Und wenn man den genäherten Werth von BC nur in ganzen und Zehntheilen von Ruthen genau verlangt, so wird es hinreichend genau seyn, wenn man zum Log. Sinus von BFJ den Log. Sinus 9,6751546 nimmt, weil der gefundene Werth von Log. Cosin. BFJ sich mehr 9,9449220 als 9,9448541 nähert. Wenn aber BC ein Bestimmungsstük für eine fortzusezende Rechnung ist, deren Resultate man genau verlangt, und also wenigstens die sechs ersten Decimalstellen des Log. Sinus von BFJ genau seyn müssen: so wird man die zu

$$9{,}6751546 = \text{Lg. sin. } 28°15',$$

hinzuzusezende Größe finden, wenn man schließt: wenn Log. Cosin. BFJ kleiner wäre als 9,9449220 = Log. Cos. 28°15' um 679 so müßte man 2350 addiren zu 9,6751546 = Log. sin. 28°15' um Log. sin. BFJ zu bekommen; weil er nun nur um 12,5 kleiner ist, wie viel muß man zu ihm addiren? d. h.

679	2350	
×	12,5	
679	29375	43
		9,6751546

folglich Log. sin. BFJ = 9,6751589.

2.) In beyden Beyspielen hat der Log. $\frac{AB}{AC}$ Cosec. A die Kennziffer 10., die ihm entsprechende Zahl wird also (§. 17.) 11 ganze Ziffern haben. Man muß aber 3 Ziffern von der Rechten gegen die Linke wieder abschneiden, weil in den gewöhnlichen Tafeln die trigonometrischen Linien selbst für den Halbmesser 10000000 angegeben sind, da hingegen ihre Logarithmen zu einem andern Halbmesser = 1 000 000 0000 gehören, dessen Log. = 10. Oder man muß die Kennziffer der Logarithmen der trigonometrischen Linien um 3 Einheiten vermindern, wenn sie die Logarithmen der darneben stehenden die trigonometrischen Linien ausdrükenden Zahlen seyn sollen. In einigen Tafeln ist der Halbmesser der trigonometrischen Linien = 1 gesezt. In diesem Fall müßte man also die Kennziffer der Logarithmen der Sinus, Tangenten, u. s. w. um 10. vermindern, um sie mit ersteren auf einerley Halbmesser zu reduciren.

§. 92.

Um die Regeln §. 89. 90. auf alle Fälle ausdehnen zu können, ist noch nöthig zu erklären, was es mit den Tangenten, Sekanten, Cotangenten und Cosekanten der stumpfen Winkel für eine Beschaffenheit habe.

Wenn der Winkel ACM (*Fig.* 35.) verschwindet; oder sein Schenkel CR in die Richtung des andern Schenkels CA gebracht wird: so fallen die Punkte M, P, T mit dem Punkt A zusammen; der Durchschnitt R mit BR aber hat nicht mehr statt, da die geraden Linien CA, BR (I, 38.) parallel sind. Der Sinus PM und die Tangente AT des Winkels verschwinden daher; der Cosinus CP und die Sekante CT fallen mit dem Halbmesser CA zusammen, oder sind dem Sinus totus gleich: die Cotangente BR aber und die Cosekante werden größer als jede Länge, die sich angeben läßt, oder wachsen über alle Gränzen hinaus; weswegen man sagt, sie seyen unendlich.

Indem der Winkel von o an nach und nach wächst;

wachsen seine Tangente und Sekante ebenfalls immer mehr und mehr. Namentlich ist (*Fig.* 36.) die Tangente AD des halben rechten Winkels ACE, oder von 45°, dem Halbmesser CA gleich (I, 6.); weil alsdenn W. ADC=ACD (I, 32.): und des Winkels ACF=$\frac{2}{3}$R=60° Sekante CG ist das Doppelte des Halbmessers CA; weil alsdenn AF=$\left\{\begin{matrix}CA\\CF\end{matrix}\right.$ (IV, 15. Cor.)=FG (I. 32. 6.). Je mehr sich der spize Winkel ACN (*Fig.* 35.) einem rechten nähert, desto größer werden seine Tangente AS und Sekante CS: und es kann, welche Länge man geben mag, ein spizer Winkel angegeben werden, dessen Tangente oder Sekante jener gegebenen Länge gleich ist, oder sie übertrift: weil man mit den gegebenen Seiten um den rechten Winkel, oder mit der gegebenen einen Seite um den rechten Winkel und der Hypotenuse, immer ein rechtwinklichtes Dreyek verzeichnen kann.

Geht endlich der Winkel in einen rechten ACB über: so werden die geraden Linien CH, AS (I, 32.) parallel, und schneiden sich nicht, wie weit man sie auch auf beyden Seiten verlängert. Die Begriffe von Tangente und Sekante (§. 63. 70.) finden daher im eigentlichen und strengen Sinn nicht mehr Statt: und wenn man der Analogie halber, und um den Umfang der Regeln auf alle Fälle auszudehnen, die Ausdrüke: Tangente, Sekante, auf den rechten Winkel anwendet; so muß man beyden Linien eine Länge zuschreiben, die größer als jede angebliche, oder unendlich ist, deren Verhältniß sowohl zum Sinus totus, als zu jeder gegebenen geraden Linie alle Gränzen überschreitet. Auf eine ähnliche Art ist das zu verstehen, was vorhin von den trigonometrischen Funktionen eines verschwindenden Winkels gesagt worden ist.

§. 93.

Wächst hernach der Winkel zu einem stumpfen ACN (*Fig.* 37.) an: so schneiden sich zwar seine Schenkel CN und das Perpendikel AT, auf der Seite TK (wie bisher für die spizen Winkel) verlängert, nicht, weil die Winkel ACN+

CAT > 2R (I, 17.): aber weil die Winkel ACL + CAL < 2R (I, 13.), so schneiden sich diese Linien CN, AT, nach der der vorhergehenden entgegengesezten Richtung verlängert, in dem Punkt L (I, Ar. 11.); und nun heissen vermöge §. 63. 70. AL die Tangente, CL die Sekante des stumpfen Winkels ACN.

Da der Winkel ACL = JCN (I, 15.): so ist, wenn man auf dem Halbmesser CJ in dem Punkt J das Perpendikel JK errichtet, welches der verlängerten CN in dem Punkt K begegnet, AL = JK, und CL = CK (I, 36.). Ebenso ist, wenn man den Winkel ACM = ACL macht, AL = AT, CL = CT. Es sind aber $\left\{\begin{matrix}JK\\AT\end{matrix}\right\}$ die Tangente (§. 63.), $\left\{\begin{matrix}CK\\CT\end{matrix}\right\}$ die Sekante (§. 70.) des spizen Winkels $\left\{\begin{matrix}JCN\\ACM\end{matrix}\right\}$, welcher mit dem stumpfen ACN zwey rechte macht (I, 13.). Die Tangente AL und die Sekante CL des stumpfen Winkels ACN sind mithin von der Tangente $\left\{\begin{matrix}JK\\AT\end{matrix}\right\}$, und Sekante $\left\{\begin{matrix}CK\\CT\end{matrix}\right\}$ seines Supplements $\left\{\begin{matrix}JCN\\ACM\end{matrix}\right\}$ in demselben Kreis der Länge nach nicht verschieden; folglich (§§. 63. 70.) auch nicht dem Verhältniß nach, welches ihre absolute Größen zum Sinus totus haben: sondern nur in Ansehung der entgegengesezten Lage, welche die Tangenten in Beziehung auf den Halbmesser CA, die Sekanten in Beziehung auf den Schenkel CN haben. Daher sind jene der entgegengesezten Operationen wegen, die sie in dem Calcul veranlassen, (§. 42. f.), auf eine diesen entgegengesezte Art zu bezeichnen und zu benennen: und da man die Tangenten und Sekanten der spizen Winkel, auf welche die Regeln ursprünglich bezogen werden, positiv oder bejahend zu nennen, und mit dem Zeichen + zu bezeichnen pflegt; so müssen die Tangenten und Sekanten der stumpfen Winkel als negativ angesehen, und mit - bezeichnet werden: kurz (*Fig.* 37.)

$$-\text{Tang.ACN} = \text{Tg.}\left\{\begin{matrix}\text{JCN}\\ \text{ACM}\end{matrix}\right\} = \text{Tg.}(2\text{R}-\text{ACN})$$

oder umgekehrt

$$\text{Tang.ACN} = -\text{Tang.JCN} = -\text{Tang.}(2\text{R}-\text{ACN})$$

$$-\text{sec.ACN} = \text{sec.}\left\{\begin{matrix}\text{JCN}\\ \text{ACM}\end{matrix}\right\} = \text{sec.}(2\text{R}-\text{ACN})$$

$$\text{sec.ACN} = -\text{sec.JCN} = -\text{sec.}(2\text{R}-\text{ACN})$$

§. 94.

Indem der Winkel von 0 an nach und nach wächst; nehmen seine Cotangente und Cosecante von der unendlichen Länge an allmählich ab: so daß, wenn irgend eine Länge gegeben wird, ein spizer Winkel kann angegeben werden, dessen Cotangente oder Cosekante jener Länge gleich ist, oder sie übertrift. Die Cosekante des Winkels von 30°, als der Sekante von 60° gleich, ist das Doppelte des Halbmessers: und Cotg. 45° = Tg. 45° = dem Halbmesser.

Je mehr sich der spize Winkel ACN (*Fig.* 35.) einem rechten nähert: desto kleiner werden seine Cotangente BU und Cosekante CU. Geht der Winkel in den rechten ACB über; so fallen die Punkte N, U mit dem Punkt B zusammen: die Cotangente BU verschwindet also, die Cosekante CU aber fällt mit dem Halbmesser CB zusammen, oder ist dem Sinus totus gleich.

Wird hierauf der Winkel stumpf, wie ACN (*Fig.* 37.): so schneidet sein verlängerter Schenkel CN selbst in dem Punkt V das auf dem Halbmesser CB in dem Punkt B errichtete, aber nach der der vorhergehenden entgegengesezten Seite verlängerte Perpendikel. Wie nun vorhin für die spizen Winkel ACM, ACN (*Fig.* 35.) der Halbmesser CB auf dem einen ihrer Schenkel CA in ihrem Scheitelpunkt oder in des Kreises Mittelpunkt C senkrecht gezogen; hernach auf diesen Halbmesser in seinem Endpunkt B ein Perpendikel errichtet, und bis zum Zusammenstossen in den Punkten R, U mit der Winkel andern Schenkeln CM, CN verlängert wurde; und alsdenn dieses Perpendikels Segmente BR, BU die Cotangenten der

$$\text{sin. tot.} : \text{sin. BFJ} = \begin{cases} BF : BJ \\ AB + AC : BC \end{cases}$$

d. h. die dritte Seite BC des Dreyeks verhält sich zur Summe der zwey gegebenen AB und AC, wie der Sinus des gefundenen Winkels BFJ zum Sinus totus.

§. 88.

Aus der vorhergehenden Construktion ergeben sich noch folgende Ausdrüke des Quadrats der dritten Seite BC unmittelbar aus den gegebenen Stüken, welche etwas geschmeidiger sind als der in §. 76. Da nemlich nach dem vorhergehenden §.

$$\text{d. i. (§. 31.)} \left.\begin{array}{l} \dfrac{FB^q : FL^q}{\text{sin. tot.}^2 : \text{Cosin. BFL}^2} \\ \text{oder } \text{sin. tot.}^2 : \text{Cos. } \tfrac{1}{2}\text{BAC}^2 \end{array}\right\} = \begin{cases} 4AB \times AK \\ 4AB \times AC \end{cases} : FJ^q$$

$$\text{folglich } FJ^q = 4AB \times AC \left(\frac{\text{Cosin. } \frac{1}{2}\text{BAC}}{\text{sin. tot.}}\right)^2$$

$$\text{und } BC^q = BJ^q = FB^q - FJ^q = (AB + AC)^q - FJ^q$$

$$\text{so ist } BC^q = (AB + AC)^q - 4AB \times AC \left(\frac{\text{Cosin. } \frac{1}{2}\text{BAC}}{\text{sin. tot.}}\right)^2$$

Zweytens, weil $CL : BK = FL : FB$

folglich auch $CL^q : BK^q = FL^q : FB^q$

$$BK^q - CL^q : BK^q = \begin{cases} FB^q - FL^q \\ BL^q \end{cases} : FB^q$$

also ferner

$$\left.\begin{array}{l} BL^q - (BK^q - CL^q) \\ BL^q - BK^q + CL^q \\ BC^q - BK^q \end{array}\right\} : \left\{\begin{array}{l} FB^q - BK^q \\ 4AB \times AK \\ 4AB \times AC \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} BL^q : FB^q \\ \dfrac{\text{sin. BFL}^2 : \text{sin. tot.}^2}{\text{sin. } \frac{1}{2}\text{BAC}^2 : \text{sin tot.}^2} \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{so ist } BC^q - BK^q \\ BC^q - (AB - AC)^q \end{array}\right\} = 4AB \times AC \left(\frac{\text{sin. } \frac{1}{2}\text{BAC}}{\text{sin. tot.}}\right)^2$$

$$\text{und } BC^q = (AB - AC)^q + 4AB \times AC \left(\frac{\text{sin. } \frac{1}{2}\text{BAC}}{\text{sin. tot.}}\right)^2$$

§. 89.

Noch wird es sich der Mühe verlohnen, die §. 78. vorgetragene Methode die übrigen Winkel des Dreyeks zu berechnen auf Regeln zurükzuführen, welche nur die gegebenen Größen selbst enthalten. (*Fig.* 26. 27.)

Da zufolge (§. 78.)

$$CD = \frac{\text{sin. CAD}}{\text{sin. tot.}} AC = \frac{\text{sin. BAC}}{\text{sin. tot.}} AC \text{ (§. 14.)}$$

$$AD = \frac{\text{Cosin. CAD}}{\text{sin. tot.}} AC$$

$$BD = \begin{cases} AB - AD = AB - \frac{\text{Cosin. CAD}}{\text{sin. tot.}} AC & \textit{Fig.}\ 26. \\ AB + AD = AB + \frac{\text{Cosin. CAD}}{\text{sin. tot.}} AC & \textit{Fig.}\ 27. \end{cases}$$

$$= AB - \frac{\text{Cosin. BAC}}{\text{sin. tot.}} AC \text{ (§. 42. ff.)}$$

so verwandelt sich die Proportion BD : CD = sin.tot. : Tg.B (§. 78.) in folgende

$$\left.\begin{array}{l} AB - \frac{\text{Cosin. BAC}}{\text{sin. tot.}} AC : \frac{\text{sin. BAC}}{\text{sin. tot.}} AC \\ \frac{AB}{AC} - \frac{\text{Cosin. BAC}}{\text{sin. tot.}} : \frac{\text{sin. BAC}}{\text{sin. tot.}} \\ \text{od. } 1 - \frac{\text{Cosin. BAC}}{\text{sin. tot.}} \times \frac{AC}{AB} : \frac{\text{sin. BAC}}{\text{sin. tot.}} \times \frac{AC}{AB} \end{array}\right\} = \text{sin. tot. : Tang. B.}$$

Daher $\text{Tang. B} = \frac{\text{sin. BAC}}{\frac{AB}{AC} - \frac{\text{Cosin. BAC}}{\text{sin. tot.}}}$

$$= \frac{\frac{AC}{AB} \text{sin. BAC}}{1 - \frac{AC}{AB} \times \frac{\text{Cosin. BAC}}{\text{sin. tot.}}}$$

§. 90.

Eben diese Stüke können zur Bestimmung des Winkels B so gebraucht werden: (*Fig.* 26. 27.)

CD : BD = sin. tot. : Tang. BCD od. Cotg. B (§. 64.)

zweytens BE : CE = sin. tot. : Tg. CBE od. Cotg. ACB

folglich Cotg. ACB = $\frac{CE}{BE}$ sin. tot.

$$= \begin{cases} \frac{AC}{BE} \text{ sin. tot.} + \frac{AE}{BE} \text{ sin. tot. } \textit{Fig. 38.} \\ \frac{AC}{BE} \text{ sin. tot.} - \frac{AE}{BE} \text{ sin. tot. } \textit{Fig. 39.} \end{cases}$$

aber sin. tot. : $\begin{Bmatrix} \text{sec. ABE} \\ \text{Tang. ABE} \end{Bmatrix}$ = BE : $\begin{cases} \text{AB (§. 69.)} \\ \text{AE (§. 64.)} \end{cases}$

also Cotg. ACB = $\begin{cases} \frac{AC}{AB} \text{ sec. ABE} + \text{Tang. ABE } \textit{Fig. 38.} \\ \frac{AC}{AB} \text{ sec. ABE} - \text{Tang. ABE } \textit{Fig. 39.} \end{cases}$

$$= \begin{cases} \frac{AC}{AB} \text{ Cosec. BAE} + \text{Cotg. BAE } \textit{Fig. 38.} \\ \frac{AC}{AB} \text{ Cosec. BAE} - \text{Cotg. BAE } \textit{Fig 39.} \end{cases}$$

$$= \frac{AC}{AB} \text{ Cosec. BAC} - \text{Cotg. BAC (§. 94.)}$$

§. 101.

Indem ferner der gegebene Winkel BAC spiz ist (*Fig.* 39. 40. 41.): wird der Winkel ACB ein rechter oder stumpf seyn; je nachdem das Perpendikel BE auf des Dreyeks dritte Seite BC (*Fig.* 40.) oder ausserhalb des Dreyeks auf die entgegengesezte Seite des Winkels ACB fällt (*Fig.* 41.); oder je nachdem AE der andern gegebenen Seite AC gleich, oder gröſser als dieselbe wird.

Im leztern Fall, (*Fig.* 41.) ist wie in §. 100. (*Fig.* 39.)

BE = $\frac{\text{sin. BAE}}{\text{sin. tot.}}$ AB = $\frac{\text{sin. BAC}}{\text{sin. tot.}}$ AB

AE = $\frac{\text{Cosin. BAE}}{\text{sin. tot.}}$ AB = $\frac{\text{Cosin. BAC}}{\text{sin. tot.}}$ AB

aber CE = AE - AC = $\frac{\text{Cosin. BAC}}{\text{sin. tot.}}$ AB - AC

Daher erstlich

$$\left.\begin{array}{c} CE : BE \\ \frac{\text{Cosin. BAC}}{\text{sin. tot.}} AB - AC : \frac{\text{sin. BAC}}{\text{sin. tot.}} AB \\ \frac{\text{Cosin. BAC}}{\text{sin. tot.}} - \frac{AC}{AB} : \frac{\text{sin. BAC}}{\text{sin. tot.}} \\ \frac{\text{Cosin. BAC}}{\text{sin. tot.}} \times \frac{AB}{AC} - 1 : \frac{\text{sin. BAC}}{\text{sin. tot.}} \times \frac{AB}{AC} \end{array}\right\} = \text{sin. tot.} : \text{Tang. BCE}$$

$$\text{also Tg. BCE} = \frac{\text{sin. BAC}}{\frac{\text{Cosin. BAC}}{\text{sin. tot.}} - \frac{AC}{AB}} = \frac{\frac{AB}{AC}\,\text{sin. BAC}}{\frac{AB}{AC} \times \frac{\text{Cosin. BAC}}{\text{sin. tot.}} - 1}$$

zweytens $BE : CE = \text{sin. tot.} : \text{Tang. CBE oder Cotg. BCE}$

$$\text{also Cotg. BCE} = \frac{CE}{BE}\,\text{sin. tot.} = \frac{AE}{BE}\,\text{sin. tot.} - \frac{AC}{BE}\,\text{sin. tot.}$$

$$\text{aber sin. tot.} : \left\{\begin{array}{l}\text{sec. ABE} \\ \text{Tang. ABE}\end{array}\right\} = BE : \left\{\begin{array}{l}AB \\ AE\end{array}\right.$$

$$\text{folglich Cotg. BCE} = \text{Tang. ABE} - \frac{AC}{AB}\,\text{sec. ABE}$$

$$= \text{Cotg. BAC} - \frac{AC}{AB}\,\text{Cosec. BAC}$$

Dieſe Ausdrüke von Tg. BCE, Cotg. BCE ſind nun in dem gegenwärtigen Fall gleichbedeutend mit den Formeln §. 99. Denn da (§. 73.)

$$AE : AB = \text{Cosin. BAC} : \text{sin. tot.} = \text{Cotg. BAC} : \text{Cosec. BAC}$$

$$AB : AE = \text{sin. tot.} : \text{Cosin. BAC}$$

und AC jezt $< AE$

folglich $AC : AB < AE : AB$ aber $AB : AC > AB : AE$ (V, 8.):

$$\text{ſo iſt } AC : AB < \left\{\begin{array}{l}\text{Cosin. BAC} : \text{sin. tot.} \\ \text{Cotg. BAC} : \text{Cosec. BAC}\end{array}\right. \text{ und } AB : AC > \text{sin. tot.} : \text{Cos. BAC}$$

$$\text{daher } \frac{AC}{AB} < \left\{\begin{array}{l}\frac{\text{Cosin. BAC}}{\text{sin. tot.}} \\ \frac{\text{Cotg. BAC}}{\text{Cosec. BAC}}\end{array}\right. \text{ und } \frac{AB}{AC} > \frac{\text{sin. tot.}}{\text{Cosin. BAC}}$$

$$\frac{AC}{AB}\,\text{Cosec. BAC} < \text{Cotg. BAC, und } \frac{AB}{AC} \times \frac{\text{Cosin. BAC}}{\text{sin. tot.}} > 1$$

Die Ausdrüke §. 101.

$$\frac{\text{Cosin. BAC}}{\text{sin. tot.}} - \frac{AC}{AB}$$

$\frac{AB}{AC} \times \frac{\text{Cosin. BAC}}{\text{sin. tot.}} - I$

$\text{Cotg. BAC} - \frac{AC}{AB}\,\text{Cosec. BAC}$

sind mithin positiv: hingegen werden die Ausdrüke §. 99.

$\frac{AC}{AB} - \frac{\text{Cosin. BAC}}{\text{sin. tot.}}$ jezt (§. 42.) $= -\left(\frac{\text{Cosin. BAC}}{\text{sin. tot.}} - \frac{AC}{AB}\right)$

$I - \frac{AB}{AC} \times \frac{\text{Cosin. BAC}}{\text{sin. tot.}} \quad = -\left(\frac{AB}{AC} \times \frac{\text{Cosin. BAC}}{\text{sin. tot.}} - I\right)$

$\frac{AC}{AB}\text{Cosec. BAC} - \text{Cotg. BAC} = -\left(\text{Cotg. BAC} - \frac{AC}{AB}\text{Cosec. BAC}\right)$,

negativ; und machen die Tangente und Cotangente des Winkels ACB negativ; welches anzeigt, sowohl daß der Winkel ACB stumpf seye, als auch, daß die negativen Ausdrüke seiner Tangente und Cotangente, als positiv genommen, die Tangente und Cotangente seines Supplements angeben. (§. 92. 93.)

§. 102.

Um das, was §. 101. von den Ausdrüken der Tangente des Winkels ACB gesagt worden ist, deutlich darzustellen: seyen (*Fig.* 42. 43.) DF = sin. BAC für einen beliebigen Halbmesser; und $DL = \frac{AB}{AC}$ sin. BAC, oder die vierte geometrische Proportionallinie zu den geraden Linien AC, AB, DF. Auf der unbestimmten durch den Punkt D, unter einem beliebigen Winkel mit DF, DL, gezogenen geraden Linie DO werde ein beliebiges Stük DG abgeschnitten, welches die Einheit vorstelle, auf welche die Zahlen $\frac{AC}{AB}$, $\frac{\text{Cosin. BAC}}{\text{sin. tot.}}$, $\frac{AB}{AC} \times \frac{\text{Cosin. BAC}}{\text{sin. tot.}}$ bezogen werden: das heißt man mache (VI, 9. 10.)

$$I : \left\{\begin{array}{l} \frac{AB}{AC} \\ \frac{\text{Cosin. BAC}}{\text{sin. tot.}} \\ \frac{AB}{AC} \times \frac{\text{Cosin. BAC}}{\text{sin. tot.}} \end{array}\right\} = DG : \left\{\begin{array}{l} DH \\ HJ \\ GM \end{array}\right.$$

so wird auch seyn (V, 24. 17.)

$$1 : \left\{ \begin{matrix} \frac{AC}{AB} - \frac{\text{Cosin. BAC}}{\text{sin. tot.}} \\ 1 - \frac{AB}{AC} \times \frac{\text{Cosin. BAC}}{\text{sin. tot.}} \end{matrix} \right\} = DG : \left\{ \begin{matrix} DJ \\ DM \end{matrix} \right.$$

Alsdenn ziehe man die geraden Linien FJ, LM; und mit ihnen durch den Punkt G die geraden Linien GK parallel; bis sie den verlängerten DF, DL in K begegnen. Weil nun (VI, 2.)

$$\left. \begin{matrix} DJ \\ DM \end{matrix} \right\} : DG = \left\{ \begin{matrix} DF \\ DL \end{matrix} \right\} : DK$$

so ist

$$\left. \begin{matrix} \frac{AC}{AB} - \frac{\text{Cosin. BAC}}{\text{sin. tot.}} \\ 1 - \frac{AB}{AC} \times \frac{\text{Cosin. BAC}}{\text{sin. tot.}} \end{matrix} \right\} : 1 = \left\{ \begin{matrix} \text{sin. BAC} \\ \frac{AB}{AC} \text{ sin. BAC} \end{matrix} \right\} : DK$$

Daher $DK = \frac{\text{sin. BAC}}{\frac{AC}{AB} - \frac{\text{Cosin. BAC}}{\text{sin. tot.}}} = \frac{\frac{AB}{AC} \text{sin. BAC}}{1 - \frac{AB}{AC} \times \frac{\text{Cosin. BAC}}{\text{sin. tot.}}}$

$= \text{Tang. ACB}$ (§. 99.)

So lang nun $\frac{AC}{AB} > \frac{\text{Cosin. BAC}}{\text{sin. tot.}}$ u. $1 > \frac{AB}{AC} \times \frac{\text{Cosin. BAC}}{\text{sin. tot.}}$

mithin $\frac{AC}{AB} - \frac{\text{Cosin. BAC}}{\text{sin. tot.}}$, $1 - \frac{AB}{AC} \times \frac{\text{Cosin. BAC}}{\text{sin. tot.}}$

positive Größen sind;

folglich auch DH > HJ, DG > GM und DJ, DM positiv sind, und auf der geraden Linie DO auf derselben Seite des Punkt D liegen, auf welcher DG liegt: fallen auch die geraden Linien DK auf den geraden Linien DN auf dieselbe Seite des Punkts D, auf welcher DF, DL liegen; sind daher gleichfalls positiv; und zeigen an, daß die Tangente von ACB positiv, und der Winkel ACB spiz sey. Die obigen Bedingungen haben aber Statt in dem Fall §. 99. *Fig.* 39: wo, wegen AC > AE, (V, 8. und §. 99.)

$AC : AB > \left\{ \begin{matrix} AE : AB \\ \text{Cosin. BAC} : \text{sin. tot.} \end{matrix} \right.$ hingegen $AB : AC < \left\{ \begin{matrix} AB : AE \\ \text{sin. tot.} : \text{Cosin. BAC} \end{matrix} \right.$

folglich $\frac{AC}{AB} > \frac{\text{Cosin. BAC}}{\text{sin. tot.}}$ $\frac{AB}{AC} < \frac{\text{sin. tot.}}{\text{Cosin. BAC}}$

und $\frac{AB}{AC} \times \frac{\text{Cosin. BAC}}{\text{sin. tot.}} < \frac{\text{sin. tot.}}{\text{Cosin. BAC}} \times \frac{\text{Cosin. BAC}}{\text{sin. tot.}}$ oder 1.

In eben diesem Fall ist auch

$$AC : AB > \begin{cases} AE : AB \\ \text{Cotg. BAC} : \text{Cosec. BAC} \end{cases} \text{(§. 73.)}$$

daher $\frac{AC}{AB}$ Cosec. BAC > Cotg. BAC

und Cotg. ACB ebenfalls positiv.

Wenn aber $\frac{AC}{AB} < \frac{\text{Cosin. BAC}}{\text{sin. tot.}}$, und $1 < \frac{AB}{AC} \times \frac{\text{Cosin. BAC}}{\text{sin. tot.}}$,

wie im 90. §. *Fig.* 40; mithin

$$\frac{AC}{AB} - \frac{\text{Cosin. BAC}}{\text{sin. tot.}}, \quad 1 - \frac{AB}{AC} \times \frac{\text{Cosin. BAC}}{\text{sin. tot.}}$$

negative Größen sind: d. i., wenn (*Fig.* 42. 43.) DH < HJ, DH < GM; folglich DJ, DM negativ sind, und auf den verlängerten DO auf die Seite des Punkts D fallen, welche der entgegengesezt ist, auf welcher man DG genommen hat: alsdenn werden auch die geraden Linien DK auf den verlängerten DN auf der Seite abgeschnitten werden, welche derjenigen entgegengesezt ist, auf welcher DF, DL liegen; sie sind daher negativ, und zeigen an, daß die Tangente von ACB negativ seye.

§. 103.

Wenn DH = HJ (*Fig.* 42.) DG = GM (*Fig.* 43.): folglich DJ, DM verschwinden; die Punkte J, M mit dem Punkt D; und die geraden Linien JF, ML mit den geraden Linien DF, DL zusammenfallen; GK also diesen parallel werden, und die Durchschnittspunkte K aufhören Statt zu finden: so kann im eigentlichen und strengen Sinn von den geraden Linien DK nicht mehr die Rede seyn; und wenn man sie der Analogie und der Allgemeinheit der Säze wegen auch alsdenn noch als vorhanden annimmt, so muß man ihnen jezt eine Länge zuschreiben, die größer als jede angebliche Größe, oder unendlich ist.

Es werden aber DH = HJ, GD = GM (§. 102.);

wenn $\frac{AC}{AB} = \frac{\text{Cosin. BAC}}{\text{sin. tot.}}$; oder $\frac{AB}{AC} = \frac{\text{sin. tot.}}{\text{Cosin. BAC}}$

und $\frac{AB}{AC} \times \frac{\text{Cosin. BAC}}{\text{sin. tot.}} = 1$, folglich

sowohl $\frac{AC}{AB} - \frac{\text{Cosin. BAC}}{\text{sin. tot.}}$ als auch $1 - \frac{AB}{AC} \times \frac{\text{Cosin. BAC}}{\text{sin. tot.}} = 0$.

Die Ausdrüke Tang. $ACB = \frac{\text{sin. BAC}}{0} = \frac{\frac{AB}{AC} \text{ sin. BAC}}{0}$,

in welche alsdenn die Formeln §. 99. verwandelt werden, bezeichnen daher ebendas, was Tang. ACB = unendlich; und Winkel ACB = R (§. 92.)

Und in der That ist (*Fig.* 40.) sin. tot. : Cosin. BAC = AB : AC alsdenn, wenn die dritte Seite des Dreyeks selbst auf der Seite AC senkrecht steht; oder wenn das Perpendikel BE (*Fig.* 39.) mit der Seite BC, folglich das Segment AE mit der Seite AC zusammenfällt, und CE verschwindet. In ebendiesem Fall ist ferner

AC : AB = Cotg. BAC : Cosec. BAC (§. 73.)

oder $\frac{AC}{AB}$ Cosec. BAC = Cotang. BAC

folglich (§. 99.) Cotang. ACB = 0

wodurch gleichfalls angezeigt wird, daß der Winkel ACB alsdenn ein rechter sey. (§. 94.)

Hieraus erhellt nun, daß die Regeln §§. 89. 90. 99. allgemein seyen; und welcher Sinn denselben nach ihren mancherley Formen beyzulegen sey.

§. 104.

Wenn AC : AB = Cosin. BAC : sin. tot. folglich ACB ein rechter Winkel ist (§. 103. *Fig.* 40.): läßt sich die Berechnung der dritten Seite auf folgende Arten abkürzen:

Erstens ist nämlich $BC^q = AB^q - AC^q$ (I, 47.)

zweytens sin. tot. : $\left\{\begin{matrix}\text{sin. BAC} = AB \\ \text{Tang. BAC} = AC\end{matrix}\right\}$: BC (§. 13. 64.)

drittens berührt alsdenn in der 30. *Fig.* diese dritte Seite BC den Halbzirkel FCK in dem Punkt C (III, 16.): so ist der Winkel CFK = BCK (III, 32.); und das Dreyek BFC ∽ BCK (VI, 4.); daher $CF : CK = \left\{ \frac{BF}{AB+AC} \right\} : BC$

Wegen des rechten Winkels FCK im Halbkreis (III, 31.) ist aber (§. 64.) $CF : CK = \text{sin. tot.} : \left\{ \frac{\text{Tang. CFK}}{\text{Tang. } \frac{1}{2}\text{BAC}} \right.$

mithin auch $\text{sin. tot.} : \text{Tang. } \frac{1}{2}\text{BAC} = AB + AC : BC.$

§. 105.

Noch ergeben sich aus den §. 62. ff. erklärten Erweiterungen der trigonometrischen Tafeln folgende Zusäze zu den Auflösungen der ersten drey Hauptfälle §. 18. ff. 24. ff. 29. ff.

Den ersten Hauptfall betreffend, wo des Dreyeks eine Seite und zwey Winkel gegeben sind: kann in dem besondern Fall §. 19. *Fig.* 13. oder 22. wenn von den gegebenen Winkeln A und B oder C ein an der gegebenen Seite liegender A ein rechter Winkel ist, die Auflösung nach §. 73. durch folgende Proportionen geschehen:

$$\text{sin. tot.} : \left\{ \frac{\text{sin. B}}{\text{Cosec. C}} \right\} = AB : BC$$

$$\text{sin. tot.} : \left[\frac{\text{Tg. B}}{\text{Cotg. C}} \right] = AB : AC$$

$$= \tfrac{1}{2}AB^{q} : \left[\frac{\frac{1}{2}AB \cdot AC}{\text{Fläche des Dreyeks}} \right.$$

Ueberhaupt werden die Höhe, der Inhalt und die übrigen zwey Seiten eines Dreyeks ABC (*Fig.* 11. 12. oder 26. 27.), dessen Seite AB und die beyden ihr anliegenden Winkel CAB und B gegeben sind, unmittelbar durch die gegebenen Stüke selbst so ausgedrükt:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Cotang. B} : \text{sin. tot.} = BD : CD \\ \text{Cotang. CAD} : \text{sin. tot.} = AD : CD \end{array}\right] \text{§. 64.}$$

daher $\text{Cotang. B} \pm \text{Cotg. CAD} : \text{sin. tot.} = AB : CD$

und allgemein (§. 93.)

Cotg. B + Cotg. CAB : sin. tot. = $\begin{cases} AB : CD \\ \frac{1}{2} AB^q : \text{Inhalt des } \Delta. \end{cases}$

folglich $CD = \frac{\text{sin. tot.}}{\text{Cotg. B} + \text{Cotg. CAB}} \cdot AB.$

Inhalt des Dreyeks $= \frac{\text{sin. tot.}}{2(\text{Cotg. B} + \text{Cotg. CAB})} AB^q.$

Ferner, weil Cotang. B ± Cotg. CAD : sin. tot. = AB : CD
und sin. CAD : sin. tot. = CD : AC
sin. B : sin. tot. = CD : BC

sind (§. 67.)

sin. CAD × Cotg. B ± sin. tot. × Cos. CAD : $\overline{\text{sin. tot.}}^2$ = AB : AC

sin. tot. × Cosin. B ± sin. B Cotg. CAD : $\overline{\text{sin. tot.}}^2$ = AB : BC

und allgemein

sin. CAB × Cotg. B + sin. tot. × Cosin. CAB : $\overline{\text{sin. tot.}}^2$ = AB : AC

sin. B × Cotg. CAB + sin. tot. × Cosin. B : $\overline{\text{sin. tot.}}^2$ = AB : BC

Auf eine ähnliche Art können, wenn eine Seite AB (*Fig.* 38. 39. 41.) und zwey Winkel CAB, ACB gegeben sind, von welchen der eine an der gegebenen Seite AB, der andere ihr gegenüber liegt; des Dreyeks Höhe, sein Inhalt und die zwey übrigen Seiten unmittelbar durch die gegebenen Stüke ausgedrükt werden.

Erstlich ist in allen Fällen

sin. BCA : sin. BAC = AB : BC

$$BC = \frac{AB \text{ sin. BAC}}{\text{sin. BCA}}$$

Zweytens weil sin. tot. : $\begin{cases} \text{sin. BAE} \\ \text{sin. BAC} \end{cases}$ = AB : BE

und sin. tot. : Cotang. BCE = BE : CE

also $\overline{\text{sin. tot.}}^2$: sin. BAE Cotg. BCE = AB : CE;

ferner sin. tot. : Cosin. BAE
oder $\overline{\text{sin. tot.}}^2$: sin. tot. Cosin. BAE $\Big\}$ = AB : AE

so sind

$\overline{\text{sin. tot.}}^2 : \text{sin. BAE Cotg. BCE} - \text{Cosin. BAE sin. tot.} = \text{AB} : \left\{\begin{matrix}\text{CE} - \text{AE} \\ \text{AC}\end{matrix}\right\}$ Fig. 38.

$\overline{\text{sin. tot.}}^2 : \text{sin. BAE Cotg. BCE} + \text{Cosin. BAE sin. tot.} = \text{AB} : \left\{\begin{matrix}\text{AE} + \text{CE} \\ \text{AC}\end{matrix}\right\}$ Fig. 39.

$\overline{\text{sin. tot.}}^2 : \text{Cosin. BAE sin. tot.} - \text{sin. BAE Cotg. BCE} = \text{AB} : \left\{\begin{matrix}\text{AE} - \text{CE} \\ \text{AB}\end{matrix}\right\}$ Fig. 41.

folglich allgemein.

$\overline{\text{sin. tot.}}^2 : \text{sin. tot. Cosin. BAC} + \text{sin. BAC Cotang. BCA} = \text{AB} : \text{AC}$

Drittens, da

$\text{sin. tot.} : \text{sin. BAC} = \text{AB} : \text{BE}$

so folgt

$\overline{\text{sin. tot.}}^3 : (\text{sin. tot. Cosin. BAC} + \text{sin. BAC Cotg. BCA}) \text{ sin. BAC}$

$= \text{AB}^q : \text{AC} \times \text{BE}$

$= \frac{1}{2}\text{AB}^q : \frac{1}{2}\text{AC} \times \text{BE}$ oder Inhalt des Δ ABC.

§. 106.

Wenn des Dreyeks ABC (*Fig.* 39. 40. 41.) zwey Seiten AB, BC, und der Winkel CAB, welcher einer derselben gegenüber liegt, gegeben sind; wie im zweyten Hauptfall §. 24: so wird, wenn man auf die dritte AC aus der Spize des gegenüber liegenden Winkels B das Perpendikel BE fällt, diese Seite durch die gegebenen Stüke ausgedrükt auf folgende Art erhalten:

$$\text{sin. tot.} : \left\{\begin{matrix}\text{sin. A} \\ \text{Cosin. A}\end{matrix}\right\} = \text{AB} : \left\{\begin{matrix}\text{BE} \\ \text{AE}\end{matrix}\right.$$

Also

$$\text{BE} = \frac{\text{sin. A}}{\text{sin. tot.}} \text{AB}$$

$$\text{AE} = \frac{\text{Cosin. A}}{\text{sin. tot.}} \text{AB}$$

Findet sich nun BE = der gegebenen Seite BC: so ist (*Fig.* 40.) der Winkel ACB ein rechter; und die dritte Seite AC $= \text{AE} = \frac{\text{Cosin. A}}{\text{sin. tot.}} \text{AB}$.

Ergibt sich aber BE < BC: so sind

$$\text{CE}^q = \text{BC}^q - \text{BE}^q = \text{BC}^q - \left(\frac{\text{sin. A}}{\text{sin. tot.}}\right)^2 \text{AB}^2$$

$$\text{und } AC = \begin{cases} AE+CE = \frac{\text{Cosin. } A}{\text{sin. tot.}} AB + \sqrt{BC^2 - \left(\frac{\text{sin. } A}{\text{sin. tot.}}\right)^2 AB^2} \\ AC-CE = \frac{\text{Cosin. } A}{\text{sin. tot.}} AB - \sqrt{BC^2 - \left(\frac{\text{sin. } A}{\text{sin. tot.}}\right)^2 AB^2} \end{cases}$$

die erste Formel für den Fall (*Fig.* 39.) wenn ACB spiz,
die zweyte . . . . . (*Fig.* 41.) wenn ACB stumpf.

Wenn der gegebene Winkel CAB stumpf ist (*Fig.* 39.): so bleibt das übrige;

aber AE ist $= \frac{\text{Cosin. } BAE}{\text{sin. tot.}} AB = -\frac{\text{Cosin. } CAB}{\text{sin. tot.}} AB$ (§. 43.)

$$\text{und } AC = CE - AE = \begin{cases} \sqrt{BC^2 - \left(\frac{\text{sin. } A}{\text{sin. tot.}}\right)^2 AB^2} - \frac{\text{Cosin. } BAE}{\text{sin. tot.}} AB \\ \sqrt{BC^2 - \left(\frac{\text{sin. } A}{\text{sin. tot.}}\right)^2 AB^2} + C\frac{\text{osin. } CAB}{\text{sin. tot.}} AB \end{cases}$$

Zur Bestimmung des Winkels ACB hat man

$BE : CE = \text{sin. tot.} : \text{Cotang. } BCE$ (§. 77.)

$AB : BE = \text{Cosec. } BAE : \text{sin. tot.}$

$AB : CE = \text{Cosec. } BAE : \text{Cotg. } BCE$

$$\left.\begin{array}{l} AB^2 : CE^2 \\ AB^2 : BC^2 - \left(\frac{\text{sin. } A}{\text{sin. tot.}}\right)^2 AB^2 \\ \quad 1 : \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 - \left(\frac{\text{sin. } A}{\text{sin. tot.}}\right)^2 \\ \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 : 1 - \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 \times \left(\frac{\text{sin. } A}{\text{sin. tot.}}\right)^2 \end{array}\right\} = \overline{\text{Cosec. } BAC}^2 : \overline{\text{Cotang. } BCE}^2$$

$$\overline{\text{Cotang. } BCE}^2 = \overline{\text{Cosec. } BAE}^2 \left(\left(\frac{BC}{AB}\right)^2 - \left(\frac{\text{sin. } A}{\text{sin. tot.}}\right)^2\right)$$

$$= \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 \overline{\text{Cosec. } BAE}^2 \left(1 - \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 \times \left(\frac{\text{sin. } A}{\text{sin. tot.}}\right)^2\right)$$

folglich (*Fig.* 38. 39.)

$$\text{Cotang. } ACB = \text{Cosec. } A \sqrt{\left(\frac{BC}{AB}\right)^2 - \left(\frac{\text{sin. } A}{\text{sin. tot.}}\right)^2}$$

$$= \frac{BC}{AB} \text{Cosec. } A \sqrt{1 - \left(\frac{AB}{BC} \times \frac{\text{sin. } A}{\text{sin. tot.}}\right)^2}$$

und *Fig.* 41.

$$\text{Cotang. BCE} = \text{Cosec. A}\sqrt{\left(\frac{BC}{AB}\right)^2 - \left(\frac{\text{sin. A}}{\text{sin. tot.}}\right)^2}$$

$$= \frac{BC}{AB}\,\text{Cosec. A}\sqrt{1 - \left(\frac{AB}{BC} \times \frac{\text{sin. A}}{\text{sin. tot.}}\right)^2}$$

$$\text{Cotang. ACB} = -\text{Cosec. A}\sqrt{\left(\frac{BC}{AB}\right)^2 - \left(\frac{\text{sin. A}}{\text{sin. tot.}}\right)^2}$$

$$= -\frac{BC}{AB}\,\text{Cosec. A}\sqrt{1 - \frac{AB}{AC} \times \left(\frac{\text{sin. A}}{\text{sin. tot.}}\right)^2}$$

Endlich läßt sich der Winkel ABC auf folgende Art bestimmen.

$$BC : AC = \text{sin. A} : \text{sin. ABC}$$

also $\text{sin. ABC} = \frac{AC}{BC}\,\text{sin. A} =$

$$= \text{sin. A}\left(\frac{\text{Cosin. CAB}}{\text{sin. tot.}} \times \frac{AB}{BC} \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\text{sin. A}}{\text{sin. tot.}}\right)^2 \cdot \left(\frac{AB}{BC}\right)^2}\right);$$ *Fig.* 39. 41.

$$= \text{sin. A}\left(\sqrt{1 - \left(\frac{\text{sin. A}}{\text{sin. tot.}}\right)^2 \left(\frac{AB}{BC}\right)^2} + \frac{\text{Cosin. CAB}}{\text{sin. tot.}} \times \frac{AB}{BC}\right)$$ *Fig.* 38.

§. 107.

Im dritten Fall, wo drey Seiten des Dreyecks gegeben sind, gibt die Methode §. 55. auch die Tangenten der Hälften der Winkel. Nemlich (§. 64. *Fig.* 18.)

$$AD : DS = \text{sin. tot.} : \text{Tang.} \tfrac{1}{2}BAC$$
$$AF : FG = \text{sin. tot.} : \text{Tang.} \tfrac{1}{2}BAC$$

folglich $AD \times AF : DS \times FG$

d. i. (§. 55.) $\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}S(\frac{1}{2}S - BC) : (\frac{1}{2}S - AC)(\frac{1}{2}S - AB) \\ = \text{sin. tot.}^2 : \text{Tang.} \frac{1}{2}BAC^2 \end{array}\right\}$

welches aus §. 55. auch so folgt:

$$\tfrac{1}{2}S(\tfrac{1}{2}S - BC) : AB \times AC = \overline{\text{Cosin.} \tfrac{1}{2}BAC}^2 : \overline{\text{sin. tot.}}^2$$
$$AB \times AC : (\tfrac{1}{2}S - AB)(\tfrac{1}{2}S - AC) = \overline{\text{sin. tot.}}^2 : \overline{\text{sin.} \tfrac{1}{2}BAC}^2$$

mithin (V, 22.)

$$\tfrac{1}{2}S(\tfrac{1}{2}S - BC) : (\tfrac{1}{2}S - AB)(\tfrac{1}{2}S - AC) = \overline{\text{Cosin} \tfrac{1}{2}BAC}^2 : \overline{\text{sin.} \tfrac{1}{2}BAC}^2$$

d. i. (§. 67.) $= \overline{\text{sin. tot.}}^2 : \overline{\text{Tang.} \tfrac{1}{2}BAC}^2$

Ferner ist nun auch

$$\tfrac{1}{4}S^2(\tfrac{1}{2}S-BC)^2 : \left\{\frac{\tfrac{1}{2}S(\tfrac{1}{2}S-BC)(\tfrac{1}{2}S-AC)(\tfrac{1}{2}S-AB)}{\text{Inhalt des } \Delta ABC^2 \text{ (§. 48.)}}\right\}$$
$$= \text{sin. tot.}^2 : \text{Tg.}\tfrac{1}{2}BAC^2$$

daher $\tfrac{1}{2}S(\tfrac{1}{2}S-BC)$: Inhalt des ΔABC
$$= \text{sin. tot.} : \text{Tg.}\tfrac{1}{2}BAC.$$

Anwendung der ebenen Trigonometrie auf zusammengesezte trigonometrische Aufgaben.

§. 108.

Die zwey Dreyeke CAD, CBD (*Fig.* 44. 45.) haben eine gemeinschaftliche gegebene Grundlinie CD. Ueberdiß sind die Winkel ACD, BCD, ADC, BDC an der Grundlinie gegeben. Man sucht den Abstand AB ihrer Spizen A und B.

Da in jedem der Dreyeke CAD, CBD, die Grundlinie und die beyden Winkel an der Grundlinie gegeben sind; so kann man AC, AD, BC, BD nach §. 18. finden. Alsdenn hat man in dem Dreyek ACB die zwey Seiten AC, BC und den eingeschlossenen Winkel $ACB = ACD \mp BCD$ (*Fig.* 44.). Folglich kann man AB nach §. 59. ff. finden. Ebenso läßt sich auch AB mittelst des Dreyeks ADB berechnen.

Hienach kann man aus einer Grundlinie CD die Entfernung zweyer Punkte A, B finden, die man unmittelbar nicht messen kann oder will, wenn man an den beyden Endpunkten C, D der Grundlinie CD die Winkel ACD BCD, BDC, ADC mißt.

Wird AB allein zu wissen verlangt; so hat man

sin. CAD : sin. CDA = CD : AC
sin. CBD : sin. CDB = CD : BC

daher $AC = \frac{\sin. CDA}{\sin. CAD} CD$

$BC = \frac{\sin. CDB}{\sin. CBD} CD$

und nun $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \times BC \frac{\text{Cosin. } ACB}{\sin. tot.}$ (§. 76.)

$= \left(\left(\frac{\sin. CDA}{\sin. CAD}\right)^2 + \left(\frac{\sin. CDB}{\sin. CBD}\right)^2 - 2 \frac{\sin. CDA}{\sin. CAD} \times \frac{\sin. CDB}{\sin. CBD} \times \frac{\text{Cosin. } ACB}{\sin. tot.} \right) CD^2.$

In Beziehung auf Viereke zerfällt diese Aufgabe in die zwey folgende:

1.) In dem Vierek ABCD (*Fig.* 44.) kennt man eine Seite CD, und die Winkel, welche die beyden Diagonallinien BC, AD, und die an der gegebenen anliegenden Seiten AC, BD mit derselben machen; man soll die übrigen Seiten AC, AB, BD; die Diagonallinien AD, BC, und die Winkel CAB, DBA bestimmen.

2.) In dem Vierek ACBD (*Fig.* 45.) kennt man die Diagonallinie CD, und die Winkel, welche die vier Seiten AC, CB, BD, DA mit dieser Diagonallinie machen; man soll die vier Seiten, die andere Diagonallinie AB, und die Winkel finden, welche sie mit den vier Seiten des Viereks macht.

Des Viereks Inhalt ist in dem ersten Fall der Summe der Dreyeke ACB, BCD gleich: wovon dieses nach §. 18; jenes nach §. 75. berechnet wird.

In dem zweyten Fall ist derselbe der Summe der Dreyeke ACD, BCD gleich, und ergibt sich unmittelbar aus den gegebenen Stüken nach §. 18.

1.) Beyspiel. *Fig.* 44.

Es seyen CD = 750 Ruthen.

ACD = 110° 0′
ADC = 38 20
148 20
179 60
CAD = 31 40

ΔCAD.

Lg. CD = 2,8750613
Lg.sin. CAD = 9,7201399
3,1549214
Lg.sin. ACD = 9,9729858
Lg.sin. ADC = 9,7925566
Lg. AD = 3,1279072
Lg. AC = 2,9474780
AD = 1342,4781 R.
AC = 886,0904
Lg. AC = 2,9474780
Lg. BC = 3,1997615
Lg.sin. ACB = 9,9790192
6,1262587
Lg. 2 = 0,3010300
Lg. ΔACB = 5,8252287
ΔACB = 668096,0
362979,0

BCD = 37° 40′
BDC = 117 30
155 10
179 60
CBD = 24 50

ΔCBD.

Lg. CD = 2,8750613
Lg.sin. CBD = 9,6232287
3,2518326
Lg.sin. BCD = 9,7860886
Lg.sin. BDC = 9,9479289
Lg. BD = 3,0379212
Lg. BC = 3,1997615
BD = 1091,2422 R.
BC = 1584,0230
Lg. BC = 3,1997615
Lg. CD = 2,8750613
Lg.sin. BCD = 9,7860886
5,8609114
0,3010300
Lg. ΔBCD = 5,5598814
ΔBCD = 362979,0

Inhalt des Vierecks = 1031675 Quadratruthen.

ΔACB nach §. 80. bis §. 83.

BC = 1584,0230 R.
AC = 886,0904
BC − AC = 697,9326
BC + AC = 2470,1134

ACD = 110° 0′
BCD = 37 40
ACB = 72 20
179 60
107 40

$\frac{CAB + CBA}{2}$ = 53 50

Lg. Tg. $\frac{1}{2}$Sume = 10,1360848
Lg. (BC-AC) = 2,8438135
12,9798983
Lg. (BC+AC) = 3,3927169
Lg. Tg. $\frac{1}{2}$Unt. = 9,5871814;
Lg. BC = 3,1997615
Lg. AC = 2,9474780
Lg. sin. ACB = 9,9790192
13,1787807
12,9264972
Lg. sin. CAB = 9,9848752
Lg. sin. CBA = 9,7325917
Lg. AB = {3,1939055 / 3,1939055} AB = 1562,8075 Ruth.

$\frac{CAB+CBA}{2}$ = 53° 50' 0"
$\frac{CAB-CBA}{2}$ = 21 7 58,56
CAB = 74 57 58,56
CBA = 32 42 1,44

Oder aus dem Dreyek BCD.

AD = 1342,4781 R.
BD = 1091,2422
AD-BD = 251,2359
AD+BD = 2433,7203
Lg. Tg. $\frac{1}{2}$Sume = 10,0826089
Lg. (AD-BD) = 2,4000817
12,4826906
Lg. (AD+BD) = 3,3862706
Lg. Tg. $\frac{1}{2}$Unt. = 9,0964200

BDC = 117° 30'
ADC = 38 20
ADB = 79 10
179 60
100 50

$\frac{ABD+BAD}{2}$ = 50 25 0"
$\frac{ABD-BAD}{2}$ = 7 7 1,43
ABD = 57 32 1,43
BAD = 43 17 58,57

Lg. AD = 3,1279072
Lg. BD = 3,0379212
Lg. sin. ADB = 9,9921902
13,1200974
13,0301114
Lg. sin. ABD = 9,9261920
Lg. sin. BAD = 9,8362059
Lg. AB = {3,1939054 / 3,1939055} AB = 1562,807 {2 / 5} Ruth.

Berechnung der Winkel nach §. 84.

in dem Δ ACB
Lg. BC sin. tot. = 13,1997615
Lg. AC = 2,9474780
Lg. Tg. φ = 10,2522835; φ = 60° 46' 39",676
Lg. Tg. (φ-45°) = 9,4510966; φ-45° = 15 46 39,676
Lg. Tg. ½ Summe = 10,1360848
Lg. Tg. ½ Unt. = 9,5871814; ½ Unt. = 21 7 58,56

in dem Δ ADB
Lg. AD sin. tot. = 13,1279072
Lg. BD = 3,0379212
Lg. Tg. ψ = 10,0899860; ψ = 50° 53' 37",79
Lg. Tg. (ψ-45°) = 9,0138106; ψ-45° = 5 53 37,79
Lg. Tg. ½ Summe = 10,0826089
Lg. Tg. ½ Unt. = 9,0964195 ½ Unt. = 7 7 1,49

Berechnung der Seite AB nach §. 76.

Lg. BC = 3,1997615
Lg. AC = 2,9474780
Lg. $\frac{BC}{AC}$ = 0,2522835 $\frac{BC}{AC}$ = 1,7876543
Lg. $\frac{AC}{BC}$ = 9,7477165-10 $\frac{AC}{BC}$ = 0,5593923
Lg. BC × AC = 6,1472395; 2,3470466
Lg. 1,7400890 = 0,2405714 $\frac{2\,\text{Cosin. ACB}}{\text{sin. tot.}}$ = 0,6069576
Lg. AB² = 6,3878109 1,7400890
Lg. AB = 3,1939054,5

Ebenso findet man aus dem ΔADB den Log. AB = 3,1939055.5, also beyde sehr nahe wie oben.

Nachdem Lg. AB auf die zuletzt angezeigte Art gefunden worden ist, lassen sich auch die Winkel CAB, ABD nach der §. 46. angegebenen Regel berechnen.

Lg. AB = 3,1939055
Lg. AC = 2,9474780
Lg. BC = 3,1997615

Lg. $\frac{AB}{AC}$ = 0,2464275 — $\frac{AB}{AC}$ = 1,76371138
Lg. $\frac{AC}{AB}$ = 9,7535725-10 — $\frac{AC}{AB}$ = 0,56698623
2,33069761

Lg. BC^2 = 6,3995230
Lg. AB×AC = 6,1413835

Lg. $\frac{BC^2}{AB \times AC}$ = 0,2581395 — $\frac{BC^2}{AB \times AC}$ = 1,81192208
0,51877553
2) 0,25938776
sin. tot. = 10000000
Cosin. CAB = 2593877.65
CAB = 74° 57′ 58″,56

Lg. AB = 3,1939055
Lg. BD = 3,0379212
Lg. AD = 3,1279072

Lg. $\frac{AB}{BD}$ = 0,1559843 — $\frac{AB}{BD}$ = 1,43213630
Lg. $\frac{BD}{AB}$ = 9,8440157-10 — $\frac{BD}{AB}$ = 0,69825774
2,13039404

Lg. AD^2 = 6,2558144
Lg. AB×BD = 6,2318267

Lg. $\frac{AD^2}{AB \times BD}$ = 0,0239877 — $\frac{AD^2}{AB \times BD}$ = 1,05678759
1,07360645
2) 0,53680322 5
sin. tot. = 10000000
Cosin. ABD = 5368032.25
ABD = 57° 32′ 1″,39

Berechnung von AB nach der Formel §. 108.

Lg. sin. ADC	= 9,7925566	
Lg. sin. CAD	= 9,7201399	
Lg. sin. BDC	= 9,9479289	
Lg. sin. CBD	= 9,6232287	
$\text{Lg.} \frac{\text{sin. ADC}}{\text{sin. CAD}}$	= 0,0724167	
$\text{Lg.} \frac{\text{sin. BDC}}{\text{sin. CBD}}$	= 0,3247002	
Lg. 2	= 0,3010300	
Lg. Cosin. ACB	= 9,4821283	entsprechende Zahlen
$\text{Lg.} \left(\frac{\text{sin. ADC}}{\text{sin. CAD}}\right)^2$	= 0,1448334;	1,3958328
$\text{Lg.} \left(\frac{\text{sin. BDC}}{\text{sin. CBD}}\right)^2$	= 0,6494004;	4,4606732
		5,8565060
$\text{Lg. } 2 \frac{\text{sin. ADC}}{\text{sin. CAD}} \times \frac{\text{sin. BDC}}{\text{sin. CBD}} \times \frac{\text{Cos. ACB}}{\text{sin. tot.}}$	= 0,1808752;	1,5145205
		4,3419855
Lg. 4,3419855	= 0,6376883.5	
Lg. $\sqrt{4,3419855}$	= 0,3188441.75	
Lg. CD	= 2,8750613	
Lg. AB	= 3,1939054.75	

2.) Beyspiel. *Fig.* 45.

ACD	= 37° 45′	BCD	= 116° 0′
ADC	= 103 45	BDC	= 34 40
	141 30		150 40
	179 60		179 60
CAD	= 38 30	CBD	= 29 20

Hieraus findet sich nach §. 18.

Lg. AC	= 3,0963126;	AC	= 1248,282 Fuß.
Lg. AD	= 2,8958460;	AD	= 786,766
Lg. BC	= 2,9679521;	BC	= 928,864
Lg. BD	= 3,1666519;	BD	= 1467,750

ΔABC.

AC = 1248,282 ACD = 37°45'
BC = 928,864 BCD = 116 0
ACB = 153 45
179 60
26 15

$\frac{ABC+BAC}{2}$ = 13 7 30

Mithin nach §. 80 bis 84. $\frac{ABC-BAC}{2}$ = 1 57 33,34

ABC = 15 5 3,34
BAC = 11 9 56,66

hienach Lg. AB = 3,3266455
und AB = 2121,512 Fuß.

CAD = 38°30' 0" CBD = 29°20' 0"
CAB = 11 9 56,66 CBA = 15 5 3,34
BAD = 27 20 3,34 ABD = 14 14 56,66

1. Anmerkung. Wenn man eine vollständige Berechnung des Vierecks verlangt, so wird die zuerst gezeigte Methode am bequemsten seyn. Nur ist dabey zu bemerken, daß es nicht nöthig ist, wenn man eines der zwey Dreyeke ACB oder ADB *Fig.* 44. aufgelöst hat, auch die Winkel des andern besonders zu berechnen. Hat man z. B. den Winkel CAB gefunden, so hat man auch, weil die Summe der vier Winkel am Umfang = 4 rechten, den Winkel ABD = 4R - (BAC + ACD + CDB). Umgekehrt hat man eine Probe für die Richtigkeit der Berechnung, wenn die Summe der berechneten Winkel CAB, ABD mit den zwey übrigen Winkeln am Umfang des Vierecks vier rechte macht. So wurde in dem 1. Beyspiel gefunden CAB = 74° 37' 58",56

ABD = 57 32 1,43
ACD = 110 0 0
CDB = 117 30 0
Summe der 4 Winkel = 359 59 59,99

nur um 0,01 Sek. zu klein. Eine gröſſere Genauigkeit geſtatten die gewöhnlichen trigonometriſchen Tafeln nicht.

2. Anmerkung. Da hier aus der vorhergehenden Rechnung nicht die Seiten AC, BC ſelbſt, ſondern ihre Logarithmen gegeben ſind, ſo wird die Berechnung der Winkel CAB, CBA oder ABD, BAD nach der Regel des §. 84. beträchtlich kürzer als die vorhergehende, beſonders wenn man die Seiten ſelbſt, welche den gegebenen Winkel einſchlieſſen, nicht zu wiſſen verlangt. Der Hülfswinkel ARB §. 84. heiſſt hier φ und ψ.

3. Anmerkung. Verlangt man nur den Abſtand AB, ſo rechnet man nach §. 76. oder nach der Formel §. 108.

§. 109.

Es ſeyen jezt die Entfernung AB *Fig.* 44. 45. und die Winkel ACB, ACD, CDA, CDB an der unbekannten Seite CD gegeben; man ſoll CD, AC, BC, AD, BD beſtimmen. Dieſer Fall kommt vor, wenn man eine unzugängliche Entfernung AB nach dem vorhergehenden §. oder auf andere Art gefunden hat, und mittelſt derſelben die Gröſſe und Lage einer neuen Grundlinie CD zur Fortſezung trigonometriſcher Operationen beſtimmt werden ſoll.

Es ſind in den Dreyeken $\begin{cases} ACD; \sin.CAD:\sin.CDA = CD:AC \\ CDB; \sin.CDB:\sin.CBD = BC:CD \end{cases}$

folglich $\sin.CAD\sin.CDB:\sin.CDA\sin.CBD = BC:AC$

daher $BC = \frac{\sin.CAD\sin.CDB}{\sin.CDA\sin.CBD} AC$

$$AC = \frac{\sin.CDA\sin.CBD}{\sin.CAD\sin.CDB} BC$$

Nun iſt (§. 76.) $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \times AC \times \frac{\text{Cosin.ACB}}{\text{sin. tot.}}$

Also 1°. $AB^2 =$

$$BC^2+\left(\frac{\sin.CDA\sin.CBD}{\sin.CAD\sin.CDB}\right)^2 BC^2-\frac{2\sin.CDA\sin.CBD}{\sin.CAD\sin.CDB}\times\frac{\text{Cosin.ACB}}{\sin.\text{tot.}}BC^2$$

$$=\left(1+\left(\frac{\sin.CDA\sin.CBD}{\sin.CAD\sin.CDB}\right)^2-\frac{2\sin.CDA\sin.CBD}{\sin.CAD\sin.CDB}\times\frac{\text{Cosin.ACB}}{\sin.\text{tot.}}\right)BC^2$$

$$\text{folgl. } BC^2=\frac{AB^2}{1+\left(\frac{\sin.CDA\sin.CBD}{\sin.CAD\sin.CDB}\right)^2-\frac{2\sin.CDA\sin.CBD}{\sin.CAD\sin.CDB}\times\frac{\text{Cosin.ACB}}{\sin.\text{tot.}}}$$

2°. $AB^2 =$

$$\left(\frac{\sin.CAD\sin.CDB}{\sin.CDA\sin.CBD}\right)^2 AC^2+AC^2-\frac{2\sin.CAD\sin.CDB}{\sin.CDA\sin.CBD}\times\frac{\text{Cosin.ACB}}{\sin.\text{tot.}}AC^2$$

mithin

$$AC^2=\frac{AB^2}{1+\left(\frac{\sin.CAD\sin.CDB}{\sin.CDA\sin.CBD}\right)^2-\frac{2\sin.CAD\sin.CDB}{\sin.CDA\sin.CBD}\times\frac{\text{Cosin.ACB}}{\sin.\text{tot.}}}$$

Ebenso $\sin.ACD:\sin.CAD=AD:CD$

$\sin.CBD:\sin.BCD=CD:BD$

$\sin.CBD\sin.ACD:\sin.CAD\sin.BCD=AD:BD$

$$BD=\frac{\sin.CAD\sin.BCD}{\sin.CBD\sin.ACD}AD$$

$$AD=\frac{\sin CBD\sin.ACD}{\sin.CAD\sin.BCD}BD$$

und, weil $AB^2=BD^2+AD^2-2BD\times AD\frac{\text{Cosin.ADB}}{\sin.\text{tot.}}$ (§. 76.)

3°. $AB^2 =$

$$BD^2+\left(\frac{\sin.CBD\sin.ACD}{\sin.CAD\sin.BCD}\right)BD^2-\frac{2\sin.CBD\sin.ACD}{\sin.CAD\sin.BCD}\times\frac{\text{Cosin.ADB}}{\sin.\text{tot.}}BD^2$$

$$BD^2=\frac{AB^2}{1+\left(\frac{\sin.CBD\sin.ACD}{\sin.CAD\sin.BCD}\right)^2-\frac{2\sin.CBD\sin.ACD}{\sin.CAD\sin.BCD}\times\frac{\text{Cosin.ADB}}{\sin.\text{tot.}}}$$

4°. $AB^2 =$

$$\left(\frac{\sin.CAD\sin.BCD}{\sin.CBD\sin.ACD}\right)^2 AD^2+AD^2-\frac{2\sin.CAD\sin.BCD}{\sin.CBD\sin.ACD}\times\frac{\text{Cosin.ADB}}{\sin.\text{tot.}}AD^2$$

$$AD^2=\frac{AB^2}{1+\left(\frac{\sin.CAD\sin.BCD}{\sin.CBD\sin.ACD}\right)^2-\frac{2\sin.CAD\sin.BCD}{\sin.CBD\sin.ACD}\times\frac{\text{Cosin.ADB}}{\sin.\text{tot.}}}$$

Jede der obigen vier Proportionen, welche die Verhältnisse von BC, AC, BD, AD zu CD angeben, dient alsdenn CD zu berechnen.

Verlangt man aber CD allein zu wissen; so ergiebt sich z. B. aus den gefundenen Verhältnissen von AB : BC und von BC : CD, das von AB : CD folgendermassen

$$1+\left(\frac{\sin.CDA\sin.CBD}{\sin.CAD\sin.CDB}\right)^2-\frac{2\sin.CDA\sin.CBD}{\sin.CAD\sin.CDB}\times\frac{\text{Cosin.}ACB}{\sin.\text{tot.}}:1=AB^2:BC^2$$

$$\left.\begin{array}{lcc} & \overline{\sin.CDB}^2 & : \overline{\sin.CBD}^2 \\ \text{oder} & \left(\frac{\sin.CDB}{\sin.CBD}\right)^2 & : \quad 1 \end{array}\right\}=BC^2:CD^2$$

$$\left(\frac{\sin.CDB}{\sin.CBD}\right)^2+\left(\frac{\sin.CDA}{\sin.CAD}\right)^2-\frac{2\sin.CDB}{\sin.CBD}\times\frac{\sin.CDA}{\sin.CAD}\times\frac{\text{Cosin.}ACB}{\sin.\text{tot.}}:1$$

$$=AB^2:CD^2$$

daher

$$CD^2=\frac{AB^2}{\left(\frac{\sin.CDB}{\sin.CBD}\right)^2+\left(\frac{\sin.CDA}{\sin.CAD}\right)^2-\frac{2\sin.CDB}{\sin.CBD}\times\frac{\sin.CDA}{\sin.CAD}\times\frac{\text{Cosin.}ACB}{\sin.\text{tot.}}}$$

welches auch aus dem §. 108. für AB^2 gegebenen Ausdruk folgt.

Wird eine vollständige Berechnung des Viereks verlangt, so möchte folgende Methode am bequemsten seyn. In jedem der zwey Dreyeke ACB, ADB kennt man einen Winkel $\left\{\begin{array}{l}ACB\\ADB\end{array}\right.$ und das Verhältniß der ihn einschliesenden Seiten. Man kann also die übrigen zwey Winkel dieser Dreyeke nach §. 84. finden. Namentlich ist nach dem vorhergehenden in dem Dreyek ACB

$$\sin.CAD\sin.CDB:\sin.CBD\sin.CDA=BC:AC.$$

Es sey erstlich $\sin.CAD\sin.CDB > \sin.CBD\sin.CDA$, folglich $BC > CA$: so hat man, wenn der Hülfswinkel ARB §. 84. hier φ heißt.

$$\left.\begin{array}{l} BC:AC \\ \text{oder } \sin.CAD\sin.CDB:\sin.CBD\sin.CDA \end{array}\right\}=\text{Tg.}\varphi:\sin.\text{tot.}$$

also $\text{Tang.}\varphi=\frac{\sin.CAD\sin.CDB\sin.\text{tot.}}{\sin.CBD\sin.CDA}$

Wenn zweytens sin. CAD sin. CDB < sin. CBD sin. CDA, folglich BC < AC: so wird

$$\text{Tang. } \varphi = \frac{\text{sin. CBD sin. CDA sin. tot.}}{\text{sin. CAD sin. CDB}}$$

Alsdenn (§. 84.) $\text{Tang. } \frac{CAB-CBA}{2} = \frac{\text{Tg. } \frac{CAB+CBA}{2} \text{ Tg.}(\varphi - 45^\circ)}{\text{sin. tot.}}$ im ersten Fall,

und $\text{Tang. } \frac{CBA-CAB}{2} = \frac{\text{Tang. } \frac{CBA+CAB}{2} \text{ Tang. } (\varphi - 45^\circ)}{\text{sin. tot.}}$ im zweyten Fall.

Hat man hienach die Winkel CAB, CBA gefunden, so kann man die Seiten BC, AC und alsdenn in dem Dreyeck CBD die Seiten BD, CD nach §. 18. berechnen. Eben so ergeben sich diese Seiten durch Auflösung der Dreyeke ABD, CBD.

Endlich findet man den Inhalt des Viereks wie §. 108.

1. Beyspiel. *Fig.* 44.

Es seyen wie im vorhergehenden §. AB = 1562,8705 R.

ACD =	110° 0′	BCD =	37° 40′
ADC =	38 20	BDC =	117 30
	148 20		155 10
	179 60		179 60
CAD =	31 40	CBD =	24 50

Lg. sin. CAD =	9,7201399
Lg. sin. CDB =	9,9479289
	19,6680088
Lg. sin. CBD =	9,6232287
Lg. sin. CDA =	9,7925566
	19,4157853
Lg. Tg. φ =	10,2522835

Oder (§. 74. 3. Anmerk.)

Lg. sin. CAD =	9,7201399	ACD =	110° 0′
Lg. sin. CDB =	9,9479289	BCD =	37 40
C. ar. Lg. sin. CBD =	0,3767713	ACB =	72 20
C. ar. Lg. sin. CDA =	0,2074434		179 60
			107 40
		$\frac{CAB+CBA}{2}$ =	53 50
Lg. Tg. φ =	10,2522835;	φ =	60 46 39″,676
Lg. Tg. (φ - 45°) =	9,4510966	φ - 45° =	15 46 39,676
Lg. Tang. $\frac{1}{2}$ Summe =	10,1360848		
Lg. Tg. $\frac{1}{2}$ Unterſch. =	9,5871814;	$\frac{CAB-CBA}{2}$ =	21 7 58,56
		CAB =	74 57 58,56
		CBA =	32 42 1,44
		ACD =	110 0 0
		CDB =	117 30 0
		CAB =	74 57 58,56
			302 27 58,56
			359 59 60,00
		ABD =	57 32 1,44
Lg. AB =	3,1939055		
Lg. sin. ACB =	9,9790192		
	3,2148863		
Lg. sin. BAC =	9,9848752		
Lg. sin. ABC =	9,7325917		
Lg. BC =	3,1997615	BC =	1584,0230 Ruth.
Lg. AC =	2,9474780	AC =	886,0904
Lg. sin. CDB =	9,9479289		
	3,2518326		
Lg. sin. CBD =	9,6232287		
Lg. sin. BCD =	9,7860886		
Lg. CD =	2,8750613	CD =	750,0000
Lg. BD =	3,0379212	BD =	1091,2422

Berechnung von CD nach der Formel §. 109.

Man findet den Nenner des Bruchs, welcher das Quadrat von CD ausdrükt, wie §. 108. = 4,3419855. Alsdenn

Lg. AB^2 = 6,3878110
Lg. 4,3419855 = 0,6376883.5
Lg. CD^2 = 5,7501226.5
Lg. CD = 2,8750613.25; CD = 750,00004 R.

2. Beyspiel. *Fig.* 45.

AB = 2121,512

ACD = 37°45′ BCD = 116° 0′
ADC = 103 45 BDC = 34 40
141 30 150 40
179 60 179 60
CAD = 38 30 CBD = 29 20

Lg. sin. CBD = 9,6900983
Lg. sin. CDA = 9,9873722
19,6774705
Lg. sin. CAD = 9,7941496
Lg. sin. CDB = 9,7549604
19,5491100
Lg. Tg. φ = 10,1283605;
Lg. Tg. (φ-45°) = 9,1664716
Lg. Tg. ½ Sume = 9,3676676
Lg. Tg. ½ Unt. = 8,5341392;
Lg. AB = 3,3266455
Lg. sin. ACB = 9,6457058
3,6809397
Lg. sin. BAC = 9,2870124
Lg. sin. CBA = 9,4153729
Lg. BC = 2,9079521; BC = 928,864 Fuß.
Lg. AC = 3,0963126; AC = 1248,232
Lg. sin. ADC = 9,9873722
3,1089404
Lg. sin. CAD = 9,7941496
Lg. CD = 2,9030900; CD = 800 Fuß.

ACD = 37°45′
BCD = 116 0
ACB = 153 45
179 60
26 15

$\frac{ABC+BAC}{2}$ = 13 7 30″
φ = 53°20′ 47″,568
φ-45° = 8 20 47,568

$\frac{ABC-BAC}{2}$ = 1 57 33,34
ABC = 15 5 3,34
BAC = 11 9 56,66

§. 110.

Wenn des Viereks ABCD *Fig.* 46. oder 47. vier Seiten und ein Winkel ABC gegeben sind, und man sucht die übrigen Winkel des Viereks und seinen Inhalt: so ziehe man die Diagonallinie AC, welche dem gegebenen Winkel gegenüber liegt. In dem Dreyek ABC sind zwey Seiten BC, AB sammt dem eingeschlossenen Winkel gegeben; man kann also die übrigen zwey Winkel des Dreyeks BAC und BCA, und die dritte Seite AC nach §. 80. ff. berechnen. Alsdenn sind in dem Dreyek ADC die drey Seiten bekannt; woraus man (§. 45. ff.) die Winkel ADC, DAC, ACD findet. Endlich hat man BAD = BAC + CAD und BCD = BCA + ACD. Verlangt man aber nur den Flächeninhalt des Viereks, so berechnet man zuerst den Inhalt und die Seite AC des Dreyeks ABC nach §. 75. ff. Alsdenn kennt man des Dreyeks ADC drey Seiten, woraus sich sein Inhalt nach §. 50. ergibt; welcher zu dem Inhalt des Dreyeks ABC addirt den Inhalt des Viereks gibt.

Beyspiel. Es seyen

AB = 354 Fuß, und ABC = 75° 20′
BC = 516 179 60
AD = 758,770 104 40
CD = 591,578

$\frac{BAC+ABC}{2}$ = 52 20

BC − AB = 162
BC + AB = 870

Lg. Tg. ½ Summe = 10,1124058
Lg. (BC − AB) = 2,2095150
12,3219208
Lg. (BC + AB) = 2,9395193
Lg. Tg. ½ Unt. = 9,3824015; $\frac{BAC-ACB}{2}$ = 13° 33′ 41″,23
Lg. AB = 2,5490033 BAC = 65 53 41,23
Lg. sin. ACB = 9,7967278 ACB = 38 46 18,77
2,7522755
Lg. sin. ABC = 9,9856129
Lg. AC = 2,7378884; AC = 546,8754 Fuß.

ΔADC nach §. 55.

AC =	546,8754 Fuß.		
AD =	758,7700		
CD =	591,5780		
S =	1897,2234		
$\frac{1}{2}S$ =	948,6117		
$\frac{1}{2}S-AC$ =	401,7363		
$\frac{1}{2}S-AD$ =	189,8417		
$\frac{1}{2}S-CD$ =	357,0337		
Lg. sin. tot.^{2} =	20,		
Lg. $(\frac{1}{2}S-AC)$ =	2,6039411		
Lg. $(\frac{1}{2}S-AD)$ =	2,2783916		
	24,8823327		
Lg. AC =	2,7378884		
Lg. AD =	2,8801102		
Lg. AC × AD =	5,6179986		
Lg. sin. $\frac{1}{2}DAC^2$ =	19,2643341		
Lg. sin. $\frac{1}{2}DAC$ =	9,6321670.5;	$\frac{1}{2}DAC$ =	25° 23' 9",38
Lg. sin. tot.^{2} =	20,	DAC =	50 46 18,76
Lg. $(\frac{1}{2}S-AD)$ =	2,2783916	BAC =	65 53 41,23
Lg. $(\frac{1}{2}S-CD)$ =	2,5527092	BAD =	116 39 59,99
	24,8311008		
Lg. AD =	2,8801102		
Lg. CD =	2,7720120		
Lg. AD × CD =	5,6521222		
Lg. sin. $\frac{1}{2}ADC^2$ =	19,1789786		
Lg. sin. $\frac{1}{2}ADC$ =	9,5894893;	$\frac{1}{2}ADC$ =	22 52 0
		ADC =	45 44 0
		DAC =	50 46 18,76
			96 30 18,76
			179 59 60,00
		ACD =	83 29 41,24
		ACB =	38 46 18,77
		BCD =	122 16 0,01

Berechnung der Seite AC nach §. 87. den Hülfswinkel BFJ=y gesetzt.

AB =	354	ABC =	75°20'
BC =	516	½ABC =	37 40
AB+BC =	870		
$\frac{AB+BC}{2}$ =	435		
Lg. AB =	2,5490033		
Lg. BC =	2,7126497		
Lg. AB×BC =	5,2616530		
Lg. $\sqrt{AB \times BC}$ =	2,6308265		
Lg. Cos. ½BAC =	9,8984944		
	12,5293209		
Lg. $\frac{AB+BC}{2}$ =	2,6384893		
Lg. Cosin. y =	9,8908316		
Lg. sin. y =	9,7983690.9	(S. 1. Anmerk. §. 91.)	
Lg. 2 =	0,3010300		
Lg. AC =	2,7378883.9	; AC = 546,8754.	

Nach §. 75.

Lg. AB×BC =	5,2616530		
Lg. sin. ABC =	9,9856129		
	5,2472059		
	0,3010300		
Lg. ΔABC =	4,9462359	; ΔABC = 88355,96 □F.	

ΔADC nach §. 50.

Lg. ½S =	2,9770885		
Lg. (½S-AD) =	2,2783916		
Lg. (½S-CD) =	2,5527092		
Lg. (½S-AC) =	2,6039411		
2)	10,4121304		
Lg. ΔADC =	5,2060652	; ΔADC = 160718,26 □F.	

Inhalt des Vierecks ABC = 249074,22 □F.

§. 111.

In dem Vierek ABCD *Fig.* 46. 47. sind zwey aneinander liegende Seiten AB, BC sammt drey Winkeln am Umfang, folglich auch der vierte Winkel gegeben. Man sucht die zwey übrigen Seiten AD, CD und den Inhalt des Viereks.

Man ziehe die Diagonallinie AC, welche die Endpunkte der gegebenen und gesuchten Seiten verbindet. Da jezt in dem Dreyek ABC zwey Seiten AB, BC, und der eingeschlossene Winkel ABC gegeben sind; so kann man AC und die Winkel BAC, ACB finden. (§. 59. ff. §. 80. ff.). Mithin kennt man auch in dem Dreyek ADC eine Seite AC und die Winkel CAD = BAD - BAC; ACD = BCD - ACB, wonach sich die Seiten AD, CD berechnen lassen. (§. 18.)

Wenn die Diagonallinie AC nicht zu wissen verlangt wird; so kann man die andere Diagonallinie BD und die Seiten AD, CD auf folgende Art finden.

Aus der Spize B des von den gegebenen Seiten eingeschlossenen Winkels fälle man die Perpendikel BE, BF auf die wo nöthig verlängerte unbekannte Seiten AD, CD. Zieht man die Diagonallinie BD, so sind BF, BE die Sinus der Winkel $\left\{\begin{matrix}\text{BDF}\\\text{BDC}\end{matrix}\right\}$ und $\left\{\begin{matrix}\text{BDE}\\\text{BDA}\end{matrix}\right\}$ für denselben Halbmesser BD.

Aber (§. 18.) $BE = \frac{AB \sin. BAE}{\text{sin. tot.}} = \frac{AB \sin. BAD}{\text{sin. tot.}}$

und $BF = \frac{BC \sin. BCF}{\text{sin. tot.}} = \frac{BC \sin. BCD}{\text{sin. tot.}}$

folgl. BF : BE
sin. BDC : sin. BDA $\Big\} = \frac{BC \sin. BCD}{\text{sin. tot.}} : \frac{AB \sin. BAD}{\text{sin. tot.}}$

$= BC \sin. BCD : AB \sin. BAD.$

Da nun das Verhältnis der Sinus der Winkel BDC, BDA, und ihre Summe BDC + BDA = ADC gegeben ist: so ergibt sich nach §. 83 ihr halber Unterschied; woraus man die Winkel BDC, BDA selbst erhält (§. 80.). Es

ist nämlich, wenn BDC > BDA

BF > BE

BC sin. BCD > AB sin. BAD

$$BF+BE:BF-BE=\begin{bmatrix}\text{Tang.}\frac{BEF+BFE}{2}\\ \text{Tang.}\frac{1}{2}ADC\end{bmatrix}:\begin{bmatrix}\text{Tang.}\frac{BEF-BFE}{2}\\ \text{Tang.}\frac{BDC-BDA}{2}\end{bmatrix}$$

und wenn BDC < BDA

BF < BE

BC sin. BCD < AB sin. BAD

$$BE+BF:BE-BF=\begin{bmatrix}\text{Tang.}\frac{BFE+BEF}{2}\\ \text{Tang.}\frac{1}{2}ADC\end{bmatrix}:\begin{bmatrix}\text{Tang.}\frac{BFE-BEF}{2}\\ \text{Tang.}\frac{BDA\ BDC}{2}\end{bmatrix}$$

Diese Proportionen lassen sich auch aus §. 81. durch folgende Construktion herleiten.

Da sowohl BFD als BED ein rechter Winkel ist (Constr.); so läßt sich um das Viereck BEDF ein Kreis beschreiben, dessen Durchmesser die Diagonallinie BD seyn wird (III, 31. Schol. 1.) Zieht man die Chorde EF: so ist $BEF=\begin{cases}BDF\\ BDC\end{cases}$, $BFE=\begin{cases}BDE\\ BDA\end{cases}$ (III, 21.); folglich $BEF+BFE=ADC$: und wiedernach §. 81. wenn BF > BE,

$$BF+BE:BF-BE=\begin{bmatrix}\text{Tg.}\frac{BEF+BFE}{2}\\ \text{Tg.}\frac{1}{2}ADC\end{bmatrix}:\begin{bmatrix}\text{Tg.}\frac{BEF-BFE}{2}\\ \text{Tg.}\frac{BDC-BDA}{2}\end{bmatrix}$$

oder wenn BF < BE,

$$BE+BF:BE-BF=\begin{bmatrix}\text{Tg.}\frac{BFE+BEF}{2}\\ \text{Tg.}\frac{1}{2}ADC\end{bmatrix}:\begin{bmatrix}\text{Tg.}\frac{BFE-BEF}{2}\\ \text{Tg.}\frac{BDA-BDC}{2}\end{bmatrix}$$

In gegenwärtigem Fall sind die Seiten BF, BE nicht selbst, sondern durch die vorhergehende Rechnung nur ihre Logarithmen unmittelbar gegeben. Man verfährt also nach §. 84., indem man einen Hülfswinkel φ so bestimmt, daß

BE : BF = sin. tot. : Tang. φ (wenn BF > BE)

BF : BE = sin. tot. : Tang. φ (wenn BF < BE)

folglich $\text{Tg.}\,\varphi = \frac{BF \cdot \text{sin. tot.}}{BE} = \frac{BC \cdot \text{sin. BCD} \cdot \text{sin. tot.}}{AB \cdot \text{sin. BAD}}$ im 1. Fall.

$= \frac{BE \cdot \text{sin. tot.}}{BF} = \frac{AB \cdot \text{sin. BAD} \cdot \text{sin. tot.}}{BC \cdot \text{sin. BCD}}$ im 2. Fall.

Ist der Winkel φ gefunden, so hat man

1.) $\text{Tang.}\,\frac{BDC - BDA}{2}$

2.) $\text{Tang.}\,\frac{BDA - DDC}{2}$ $= \frac{\text{Tang.}\,\frac{1}{2}ADC \cdot \text{Tg.}\,(\varphi - 45°)}{\text{sin. tot.}}$

woraus sich die Winkel BDC und BDA selbst ergeben (§. 80.), und die Seiten AD, CD berechnet werden können (§. 18.).

Endlich ist des Viereks Inhalt

$= \Delta ABC + \Delta ADC$

$= \frac{1}{2}AB \times BC \frac{\text{sin. ABC}}{\text{sin. tot.}} + \frac{1}{2}AD \times CD \frac{\text{sin. ADC}}{\text{sin. tot.}}$

oder $= \Delta ABD + \Delta BCD$

$= \frac{1}{2}AB \times AD \frac{\text{sin. BAD}}{\text{sin. tot.}} + \frac{1}{2}BC \times CD \frac{\text{sin. BCD}}{\text{sin. tot.}}$ (§. 75.).

Beyspiel.

ABC =	75°20′	AB =	354 Fuß.
BAD =	116 40	BC =	516
BCD =	122 16		
	314 16		
	359 60		
ADC =	45 44		

Hieraus wie §. 110.

AC =	546,8754 Fuß.	BAC =	65°53′41″,23
Lg. AC =	2,7378884	ACB =	38 46 18,77
Lg sin. ADC =	9,8549730	BAD =	116 40 0
	2,8829154	BCD =	122 16 0
Lg.sin. CAD =	9,8890967	CAD =	50 46 18,77
Lg.sin. ACD =	9,9971948	ACD =	83 29 41,23
Lg. CD =	2,7720121	CD =	591,5781
Lg. AD =	2,8801102	AD =	758,7700

Lg. BC =	2,7126497	
Lg. sin. BCD =	9,9271509	
Lg. BF =	2,6398006	
Lg. AB =	2,5490033	
Lg. sin. BAD =	9,9511590	
Lg. BE =	2,5001623	
Lg. Tg. φ =	10,1396383;	$\varphi = 54° 3' 23'',047$
Lg. Tg. (φ-45°) =	9,2024712;	$\varphi - 45° = 9\ 3\ 23,047$
Lg. Tg. $\frac{1}{2}$ADC =	9,6250356;	$\frac{1}{2}ADC = 22\ 52\ 0$
Lg. Tg. $\frac{1}{2}$Unt. =	8,8275068;	$\frac{BDC-BDA}{2} = 3\ 50\ 44,56$
		BDC = 26 42 44,56
		BDA = 19 1 15,44
Lg. AB =	2,5490033	DAB = 116° 40' 0''
Lg. sin. BDA =	9,5131029	BCD = 122 16 0
	3,0359004	BDA+DAB = 135 41 15,44
Lg. sin. ABD =	9,8442098	BDC+BCD = 148 58 44,56
Lg. sin. BAD =	9,9511590	179 59 60,00
Lg. AD =	2,8801102	ABD = 44 18 44,56
Lg. BD =	2,9870594	DBC = 31 1 15,44
Lg. BC =	2,7126497	AD = 758,7700 Fuß.
Lg. sin. BDC =	9,6527412	BD = 970,6426
	3,0599085	
Lg. sin. DBC =	9,7121035	
Lg. sin. BCD =	9,9271509	
Lg. CD =	2,7720120	CD = 591,5780
Lg. BD =	2,9870594	

folglich $\text{Tg.}\,\varphi = \frac{BF \sin.\,tot.}{BE} = \frac{BC \sin.\,BCD \sin.\,tot.}{AB \sin.\,BAD}$ im 1. Fall.

$= \frac{BE \sin.\,tot.}{BF} = \frac{AB \sin.\,BAD \sin.\,tot.}{BC \sin.\,BCD}$ im 2. Fall.

Ist der Winkel φ gefunden, so hat man

1.) $\text{Tang.}\,\frac{BDC - BDA}{2}$

2.) $\text{Tang.}\,\frac{BDA - DDC}{2}$ $= \frac{\text{Tang.}\,\frac{1}{2}ADC\ \text{Tg.}\,(\varphi - 45°)}{\text{sin. tot.}}$

woraus sich die Winkel BDC und BDA selbst ergeben (§. 80.), und die Seiten AD, CD berechnet werden können (§. 18.).

Endlich ist des Viereks Inhalt

$= \Delta ABC + \Delta ADC$

$= \frac{1}{2}AB \times BC \frac{\sin.\,ABC}{\text{sin. tot.}} + \frac{1}{2}AD \times CD \frac{\sin.\,ADC}{\text{sin. tot.}}$

oder $= \Delta ABD + \Delta BCD$

$= \frac{1}{2}AB \times AD \frac{\sin.\,BAD}{\text{sin. tot.}} + \frac{1}{2}BC \times CD \frac{\sin.\,BCD}{\text{sin. tot.}}$ (§. 75.).

Beyspiel.

ABC =	75°20′	AB =	354 Fuß.
BAD =	116 40	BC =	516
BCD =	122 16		
	314 16		
	359 60		
ADC =	45 44		

Hieraus wie §. 110.

AC = 546,8754 Fuß.

Lg. AC =	2,7378884	BAC =	65°53′41″,23
Lg sin. ADC =	9,8549730	ACB =	38 46 18,77
	2,8829154	BAD =	116 40 0
Lg.sin. CAD =	9,8890967	BCD =	122 16 0
Lg.sin. ACD =	9,9971948	CAD =	5° 46 18,77
		ACD =	83 29 41,23
Lg. CD =	2,7720121	CD =	591,5781
Lg. AD =	2,8801102	AD =	758,7700

Lg. BC =	2,7126497		
Lg. sin. BCD =	9,9271509		
Lg. BF =	2,6398006		
Lg. AB =	2,5490033		
Lg. sin. BAD =	9,9511590		
Lg. BE =	2,5001623		
Lg. Tg. φ =	10,1396383;	φ =	54° 3' 23",047
Lg. Tg. (φ-45°) =	9,2024712;	φ-45° =	9 3 23,047
Lg. Tg. $\frac{1}{2}$ADC =	9,6250356;	$\frac{1}{2}$ADC =	22 52 0
Lg. Tg. $\frac{1}{2}$Unt. =	8,8275068;	$\frac{BDC-BDA}{2}$ =	3 50 44,56
		BDC =	26 42 44,56
		BDA =	19 1 15,44
Lg. AB =	2,5490033	DAB =	116° 40' 0"
Lg. sin. BDA =	9,5131029	BCD =	122 16 0
	3,0359004	BDA+DAB =	135 41 15,44
Lg. sin. ABD =	9,8442098	BDC+BCD =	148 58 44,56
Lg. sin. BAD =	9,9511590		179 59 60,00
Lg. AD =	2,8801102	ABD =	44 18 44,56
Lg. BD =	2,9870594	DBC =	31 1 15,44
Lg. BC =	2,7126497	AD =	758,7700 Fuß.
Lg. sin. BDC =	9,6527412	BD =	970,6426
	3,0599085		
Lg. sin. DBC =	9,7121035		
Lg. sin. BCD =	9,9271509		
Lg. CD =	2,7720120	CD =	591,5780
Lg. BD =	2,9870594		

Lg. AB = 2,5490033
Lg. BC = 2,7126497
Lg. sin. ABC = 9,9856129
5,2472659
Lg. 2 = 0,3010300
Lg. ΔABC = 4,9462359 ΔABC = 88356,0 QF.
Lg. AD = 2,3801102
Lg. CD = 2,7720120
Lg. sin. ADC = 9,8549730
5,5070952
Lg. 2 = 0,3010300
Lg. ΔACD = 5,2060652 ΔACD = 160718,3 QF.
Viereck ABCD = 249074,3

§. 112.

Es sind die Gegenseiten AB, CD (*Fig.* 48. 49.) des Vierecks ABCD und alle Winkel gegeben. Man sucht die übrigen zwey Seiten und den Inhalt des Vierecks.

Sind erstlich die Gegenwinkel des Vierecks einander gleich, folglich die Figur ein Parallelogramm: so ist die Aufgabe unbestimmt oder unmöglich, je nachdem die gegebenen Seiten gleich sind oder nicht.

Wenn zweytens die zwey einer der gegebenen Seiten anliegenden Winkel ADC, DCB oder DAB, ABC zusammen zwey rechte machen; folglich (I, 28.) die gesuchten Seiten einander parallel sind: so ist die Aufgabe ebenfalls unbestimmt.

Machen aber drittens die zwey einer der gegebenen Seiten, z. B. AB, anliegenden Winkel BAD und ABC zusammen weniger oder mehr als zwey rechte (*Fig.* 48. 49.); so werden die gesuchten Seiten AD, BC verlängert sich schneiden. Es geschehe in G. Alsdenn ist nach §. 18. für die zwey Fälle *Fig.* 48. 49.

$$AG = \frac{AB \sin. ABG}{\sin. AGB} = \begin{cases} \frac{AB \sin. ABC}{\sin. (ABC+BAD)} \\ \frac{AB \sin. ABC}{\sin. (ABC+BAD-2R)} \end{cases}$$

$$BG = \frac{AB \sin. BAG}{\sin. AGB} = \begin{cases} \frac{AB \sin. BAD}{\sin. (ABC+BAD)} \\ \frac{AB \sin. BAD}{\sin. (ABC+BAD-2R)} \end{cases}$$

$$DG = \frac{CD \sin. DCG}{\sin. DGC} = \begin{cases} \frac{CD \sin. BCD}{\sin. (ABC+BAD)} \\ \frac{CD \sin. BCD}{\sin. (ABC+BAD-2R)} \end{cases}$$

$$CG = \frac{CD \sin. CDG}{\sin. DGC} = \begin{cases} \frac{CD \sin. ADC}{\sin. (ABC+BAD)} \\ \frac{CD \sin. ADC}{\sin. (ABC+BAD-2R)} \end{cases}$$

folglich für den Fall *Fig.* 48.

$$AD = AG - DG = \frac{AB \sin. ABC - CD \sin. BCD}{\sin. (ABC + BAD)}$$

$$BC = BG - CG = \frac{AB \sin. BAD - CD \sin. ADC}{\sin. (ABC + BAD)}$$

und für den Fall *Fig.* 49.

$$AD = DG - AG = \frac{CD \sin. BCD - AB \sin. ABC}{\sin. (ABC + BAD - 2R)}$$

$$BC = CG - BG = \frac{CD \sin. ADC - AB \sin. BAD}{\sin. (ABC + BAD - 2R}$$

Endlich ist der Inhalt des Vierecks

$$= \begin{cases} \Delta ABG - \Delta DCG \; \textit{Fig.} 48. \\ \Delta DCG - \Delta ABG \; \textit{Fig.} 49. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{AB \times BG \sin. ABC - CD \times CG \sin. BCD}{2 \sin. tot.} & \textit{Fig.} 48. \\ \frac{CD \times CG \sin. BCD - AB \times BG \sin. ABC}{2 \sin. tot.} & \textit{Fig.} 49. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{AB^q \sin. BAD \sin. ABC - CD^q \sin. BCD \sin. ADC}{2 \sin. tot. \sin. (ABC + BAD)} & \textit{Fig.} 48. \\ \frac{CD^q \sin. BCD \sin. ADC - AB^q \sin. BAD \sin. ABC}{2 \sin. tot. \sin. (ABC + BAD - 2R)} & \textit{Fig.} 49. \end{cases}$$

Wenn viertens $BAD+ABC<2R$; aber $BAD+ADC=2R$, folglich die gegebenen Seiten einander parallel sind: so zeigt sowohl die Betrachtung der Figur als die Anwendung obiger Formeln auf diesen besondern Fall, daß alsdenn

$$AD=\begin{cases}\frac{(AB-CD)\sin.ABC}{\sin.(ABC+BAD)} & \textit{Fig. 48.}\\ \frac{(CD-AB)\sin.ABC}{\sin.(ABC+BAD-2R)} & \textit{Fig. 49.}\end{cases}$$

$$BC=\begin{cases}\frac{(AB-CD)\sin.BAD}{\sin.(ABC+BAD)} & \textit{Fig. 48.}\\ \frac{(CD-AB)\sin.BAD}{\sin.(ABC+BAD-2R)} & \textit{Fig. 49.}\end{cases}$$

$$\text{Inhalt des Vierecks}=\begin{cases}\frac{(AB^q-CD^q)\sin.BAD\sin.ABC}{2\sin.tot.\sin.(ABC+BAD)} & \textit{Fig. 48.}\\ \frac{(CD^q-AB^q)\sin.BAD\sin.ABC}{2\sin.tot.\sin.(ABC+BAD-2R)} & \textit{Fig. 49.}\end{cases}$$

§. 113.

Die auf die Voraussezung, daß $ABC+BAD<2R$, gegründeten Ausdrüke der Seiten AD, BC, und des Flächeninhalts des Vierecks lassen sich durch folgende denen §. 43. ähnliche Betrachtungen allgemein machen. Wenn der spize Winkel ACE *Fig.* 17. wächst: so wächst sein Sinus EF ebenfalls, bis er, wenn der spize Winkel zu einem rechten angewachsen ist, am grösten und dem Halbmesser gleich wird; nimmt alsdenn bey fernerem Wachsen des Winkels immer mehr und mehr ab, bis er, wenn der Schenkel CE auf die Verlängerung CB des andern Schenkels CA zu liegen kommt, folglich $ACE+ECB=2R$, und der Bogen $ADB=\frac{1}{2}$Umfang wird, verschwindet. Wächst der Winkel und Bogen ferner, und wird jener gröser als zwey rechte, wie ACg, dieser gröser als der halbe Umfang, wie ADg: so kommt sein Sinus gH wieder zum Vorschein, aber auf einer Seite des Durchmessers AB, welche derjenigen entgegengesezt ist, auf welcher vorhin die Sinus der Winkel oder Bogen, welche kleiner als zwey rechte oder der halbe Umfang sind, lagen. Der Sinus des convexen Winkels ACg oder des Bo-

gens ADg ist also gleich dem Sinus des Ueberschusses BCg oder Bg des Winkels oder Bogens ACg, ADg über zwey rechte oder den halben Umfang; bekommt aber seiner entgegengesezten Lage halber das Zeichen —: oder es ist, wenn A einen Winkel $> 2R$ oder 180° bezeichnet,

$$-\sin. A = \sin.(A-2R) = \sin.(A-180°)$$

oder $$\sin. A = -\sin.(A-2R) = -\sin.(A-180°)$$

Weil ferner $\sin. BCg = \sin.(2R-ACg)$ (§. 14.): so ist auch, wenn wieder $A > 2R$ oder 180°,

$$-\sin. A = \sin.(4R-A) = \sin.(360°-A)$$

oder $$\sin. A = -\sin.(4R-A) = -\sin.(360°-A)$$

Hienach ist, wenn $ABC+BAD > 2R$ (*Fig.* 49.)

$$AD = \frac{CD \sin. BCD - AB \sin. ABC}{-\sin.(ABC+BAD)}$$

$$= \frac{AB \sin. ABC - CD \sin. BCD}{\sin.(ABC+BAD)}$$

welches der auf die Voraussezung $ABC+BAD < 2R$ gegründete Ausdruk der Seite AD ist.

Umgekehrt, wenn der auf die Voraussezung $ABC+BAD < 2R$ (*Fig.* 48.) sich gründende Ausdruk der Seite AD auf den Fall, wo $ABC+BAD > 2R$ (*Fig.* 49.) angewendet wird, ist $\sin.(ABC+BAD) = -\sin.(ABC+BAD-2R)$

mithin $$AD = \frac{AB \sin. ABC - CD \sin. BCD}{-\sin.(ABC+BAD-2R)}$$

$$= \frac{CD \sin. BCD - AB \sin. ABC}{\sin.(ABC+BAD-2R)}$$

übereinstimmend mit der für diesen Fall aus der Betrachtung der Figur hergeleiteten Formel.

Ebenso wird die Allgemeinheit der übrigen Ausdrüke gezeigt.

Wendet man obige Ausdrüke auf den Fall an, wo $ABC+BAD = 2R$, folglich die gesuchten Seiten einander parallel sind; so wird $\sin.(ABC+BAD) = \sin. 180° = 0$. Ueberdiß sind

$\frac{CD \sin. BCD}{\sin. tot.}$ und $\frac{AB \sin. ABC}{\sin. tot.}$ die von den Endpunkten D, A der Seiten DC, AB auf die Seite BC oder ihre Verlängerung gefällte Perpendikel, welche in diesem Fall einander gleich sind; folglich wird $AD = \frac{0}{0}$, welches das Zeichen der Unbestimmtheit ist. Ebenso wird auch $BC = \frac{0}{0}$.

Ist aber zugleich $ABC + BAD = 2R$, und $BAD + ADC = R$, folglich die Figur ein Parallelogramm: so wird $AD = \frac{(AB - CD) \sin. ABC}{0}$, welches das Zeichen der Unmöglichkeit ist, wenn nicht zugleich $AB = CD$, mithin $AB - CD = 0$ ist; wo $AD = \frac{0}{0}$ wird, und die Aufgabe unbestimmt ist.

1.) Beyspiel. *Fig.* 48.

Es seyen AB = 536 Fuß.
CD = 379

Lg. AB =	2,7291648
Lg. sin. (B+A) =	9,6565505
	3,0726143
Lg. sin. B =	9,9717762
Lg. sin. A =	9,9971704
Lg. AG =	3,0443905
Lg. BG =	3,0697847
Lg. CD =	2,5786392
Lg. sin. (B+A) =	9,6565505
	2,9220887
Lg. sin. C =	9,9898597
Lg. sin. D =	9,9856790
Lg. DG =	2,9119484
Lg. CG =	2,9077677

ABC =	69°34′
BCD =	102 20
CDA =	104 38
	276 32
	359 60
mithin BAD =	83 28
und ABC + BAD =	153 2
AG =	1107,619 Fuß.
BG =	1174,315
DG =	816,485
CG =	808,663
AD =	291,134
BC =	365,652

Lg. AB = 2,7291648
Lg. BG = 3,0697847
Lg. sin. ABC = 9,9717762
5,7707257
Lg. 2 = 0,3010300
Lg. ΔABG = 5,4696957; ΔABG = 294914,2 Q.F.
Lg. CD = 2,5786392
Lg. CG = 2,9077677
Lg. sin. BCD = 9,9898597
5,4762666
Lg. 2 = 0,3010300
Lg. ΔDCG = 5,1752366; ΔDCG = 149705,1
Viereck ABCD = 145209,1

2. Beyspiel. *Fig.* 49.

AB = 354,000 Fuß.
CD = 591,578
Lg. AB = 2,5490033
Lg. sin. (B+A) = 9,3178789
3,2311244
Lg. sin. B = 9,9856129
Lg. sin. A = 9,9511590
Lg. AG = 3,2167373; AG = -1647,165 Fuß.
Lg. BG = 3,1822834; BG = -1521,540
Lg. CD = 2,7720120
Lg. sin. (B+A) = 9,3178789
3,4541331
Lg. sin. C = 9,9271509
Lg. sin. D = 9,8549730
Lg. DG = 3,3812840; DG = -2405,935
Lg. CG = 3,3091061; CG = -2037,540
AG-DG = AD = 758,770
BG-CG = BC = 516,000

ABC = 75°20'
BCD = 122 16
CDA = 45 44
243 20
359 60
BAD = 116 40
ABC+BAD = 192 0

Lg. AB = 2,5490033
Lg. BG = 3,1822834
Lg. sin. ABC = 9,9856129
5,7168996
0,3010300
Lg. ΔABG = 5,4158696 ; ΔABG = -260537,0 Q.F.
Lg. CD = 2,7720120
Lg. CG = 3,3091661
Lg. sin. BCD = 9,9271509
6,0082690
0,3010300
Lg. ΔDCG = 5,7072390 ; ΔDCG = -509611,3

ΔABG - ΔDCG
Vierek ABCD = 249074,3

1. Anmerkung. Da im zweyten Beyspiel ABC + BAD > 2R, so ist sin. (ABC + BAD) negativ, und in gegenwärtigem Fall = - sin. (192° - 180°) = - sin. 12° (§. 113.). Mithin wird, wenn man die auf den Fall *Fig.* 48. sich beziehenden Formeln auf den Fall *Fig.* 49. anwendet,

$$AG = \frac{AB \sin. ABC}{-\sin.(ABC+BAD-2R)} = -\frac{AB \sin. ABC}{\sin.(ABC+BAD-2R)}$$

Man hat daher nicht nöthig, bey der Rechnung mit Logarithmen auf die Zeichen der Zahlen, auf welche sie sich beziehen, Rükſicht zu nehmen; sondern man rechnet so, als ob alle diese Zahlen positiv wären, und gibt dem Resultat das Zeichen, welches es nach den algebraischen Regeln haben muß. So findet man in dem 2. Beyspiel, weil BG negativ,

$$\Delta ABG = \frac{AB \times (-BG) \sin. ABC}{2 \sin. tot.} = -\frac{AB \times BG \sin. ABC}{2 \sin. tot.}$$

dem Lg. $\frac{AB \times BG \sin. ABC}{2 \sin. tot.}$ entspricht aber die Zahl 260537,0, folglich ist ΔABG = - 260537,0 Quadratfuß.

2. Anmerkung. Diese negative Ausdrüke der Seiten AG, BG, DG, CG und der Dreyeke ABG, DCG bezeich-

nen die Lage dieser Stüke in Beziehung auf die Seite AB des Viereks, welche der in *Fig.* 48. entgegengesezt ist. Man hätte die negativen Ausdrüke vermeiden können, wenn man die auf den Fall *Fig.* 49. sich beziehenden Formeln gebraucht hätte.

§. 114.

In dem Vierek ABCD (*Fig.* 48. 49. 50.) sind drey aneinander liegende Seiten DA, AB, BC, und die dazwischen eingeschlossenen Winkel A, B gegeben. Man sucht die vierte Seite CD, die übrigen zwey Winkel, und den Inhalt des Viereks.

Wenn erstlich $A+B=2R$ (*Fig.* 50.), folglich (I, 28.) die Seiten AD, BC parallel sind; so ziehe man mit der zwischen den gegebenen Winkeln liegenden Seite AB durch den Endpunkt D der kleinern AD der zwey andern gegebenen Seiten die Parallele DF, welche die größere BC in F schneide. Alsdenn ist (I, 34.) $DF=AB$, $CF=BC-BF=BC-AD$, und $DFC=ABC$. Man kennt also des Dreyeks DFC zwey Seiten DF, FC und den eingeschlossenen Winkel DFC, woraus sich die Seite CD, und die Winkel DCF, CDF berechnen lassen. Alsdenn ist $ADC=ADF+CDF=ABC+CDF$. Der Inhalt des Viereks ist $=\Delta ABC+\begin{cases}\Delta ADC\\ \Delta ADB\end{cases}$ (I, 37.)

$$=\frac{AB\times BC\sin.ABC+AB\times AD\sin.BAD}{2\sin.tot.}$$

$$=\frac{AB\times BC\sin.ABC+AB\times AD\sin.ABC}{2\sin tot.}\text{ (weil }ABC+BAD=2R\text{)}$$

$$=\frac{BC+AD}{2}\times\frac{AB\sin.ABC}{\sin.tot.}=\frac{BC+AD}{2}\times\frac{AB\sin.DAB}{\sin.tot.}$$

Wenn zweytens $BAD+ABC\lesseqgtr 2R$ (*Fig.* 48. 49.); so ziehe man mit der zwischen den gegebenen Winkeln liegenden Seite AB durch den Endpunkt D einer AD der zwey andern gegebenen Seiten die Parallele DE; und durch den andern Endpunkt B der Seite AB die Parallele BE mit jener Seite AD, welche die DE in E schneide.

In dem Dreyek BFE (*Fig.* 48.) hat man BE=AD; FEB=BAD (I, 34.); und, weil BAD+ABE = 2R (I, 29.), FBE=2R—(BAD+ABC); endlich BFE= ABC. Folglich (§. 18.)

$$BF=\frac{BE\sin.BEF}{\sin.BFE}=\frac{AD\sin.BAD}{\sin.ABC}$$

$$EF=\frac{BE\sin.FBE}{\sin.BFE}=\frac{AD\sin.FBE}{\sin..ABC}=\frac{AD\sin.(BAD+ABC)}{\sin.ABC}$$

daher $DF=DE-FE=AB-\frac{AD\sin.(BAD+ABC)}{\sin.ABC}$

$$CF=BC-BF=BC-\frac{AD\sin.BAD}{\sin.ABC}$$

Ist aber BAD+ABC > 2R (*Fig.* 49.): so hat man BEF=ABE=2R-BAD; EBF=BAD+ABC-2R; BFE=2R-ABC: mithin (§. 18.)

$$BF=\frac{BE\sin.BEF}{\sin.BFE}=\frac{AD\sin.BAD}{\sin.ABC}$$

$$FE=\frac{BE\sin.EBF}{\sin.BFE}=\frac{AD\sin.(BAD+ABC-2R)}{\sin.ABC}$$

und $DF=DE+FE=AB+\frac{AD\sin.(BAD+ABC-2R)}{\sin.ABC}$

$$=AB-\frac{AD\sin.(BAD+ABC)}{\sin.ABC}\ (\S.\ 113.)$$

$$CF=BC-BF=BC-\frac{AD\sin.BAD}{\sin.ABC}$$

Man kennt also jezt in dem Dreyek DFC (*Fig.* 48. 49.) zwey Seiten DF, CF, und den eingeschlossenen Winkel DFC = ABC (I, 29.): folglich kann man die Seite CD und die Winkel DCF, CDF berechnen; woraus man auch hat ADC=ADE+CDF = ABE+CDF.

Oder man verlängere die zwey an den gegebenen Winkeln liegende Seiten AD, BC, bis sie einander in G begegnen: so ist (§. 18.)

$$AG=\frac{AB\sin.ABG}{\sin.G}=\frac{AB\sin.ABC}{\sin.(BAD+ABC)}\ (Fig.\ 48.)$$

$$BG=\frac{AB\sin.BAG}{\sin.G}=\frac{AB\sin.BAD}{\sin.(BAD+ABC)}$$

und *Fig.* 49.

$$AG = \frac{AB \sin. ABG}{\sin. G} = \frac{AB \sin. ABC}{\sin.(BAD+ABC-2R)}$$

$$BG = \frac{AB \sin. BAG}{\sin. G} = \frac{AB \sin. BAD}{\sin.(BAD+ABC-2R)}$$

folglich

$$\left.\begin{aligned} GD = AG - AD &= \frac{AB \sin. ABC}{\sin.(BAD+ABC)} - AD \\ GC = BG - BC &= \frac{AB \sin. BAD}{\sin.(BAD+ABC)} - BC \end{aligned}\right\} \textit{Fig.}\ 48.$$

$$\left.\begin{aligned} GD = AG+AD &= \frac{AB \sin. ABC}{\sin.(BAD+ABC-2R)} + AD \\ &= -\left(\frac{AB \sin. ABC}{\sin.(BAD+ABC)} - AD\right) \\ GC = BG+BC &= \frac{AB \sin. BAD}{\sin.(BAD+ABC-2R)} + BC \\ &= -\left(\frac{AB \sin. BAD}{\sin.(BAD+ABC)} - BC\right) \end{aligned}\right\} \textit{Fig.}\ 49.$$

Man kennt also in dem Dreyek DGC zwey Seiten DG, CG, und den eingeschlossenen Winkel; und kann daher die dritte Seite CD, und die übrigen zwey Winkel GDC, DCG berechnen, welche in dem Fall *Fig.* 48. die Supplemente der Winkel des Viereks, oder die äussern Winkel desselben, in dem Fall *Fig.* 49. aber die Winkel des Viereks selbst sind. Der Inhalt des Viereks ist $= \begin{cases} \Delta ABG - \Delta CDG & \textit{Fig.}\ 48. \\ \Delta CDG - \Delta ABG & \textit{Fig.}\ 49. \end{cases}$ welcher sich unmittelbar durch die gegebenen Stüke so ausdrüken läßt.

Es ist (*Fig.* 48.) $DG = AG - AD$

$CG = BG - BC$

folgl. $CG \times DG = AG \times BG - AD \times BG - AG \times BC + AD \times BC$

$AG \times BG - CG \times DG = AD \times BG + AG \times BC - AD \times BC$

aber $\frac{CG \times DG \sin. G}{2 \sin. tot.} = \Delta DGC$

$\frac{AG \times BG \sin. G}{2 \sin. tot.} = \Delta AGB$

$$\text{also } \left.\begin{matrix}\Delta AGB-\Delta DGC\\ \text{Viereck } ABCD\end{matrix}\right\} = \frac{AG\times BG-CG\times DG}{2\sin.\,tot.}\ \sin.\,G$$

$$= \frac{AD\times BG+AG\times BC-AD\times BC}{2\sin.\,tot.}\ \sin.\,G$$

$$= \frac{AB\times AD\sin.BAD+AB\times BC\sin.ABC-AD\times BC\sin.(BAD+ABC)}{2\sin.\,tot.}$$

In dem Fall *Fig.* 49. ist

$$DG = AG+AD$$

$$CG = BG+BC$$

folgl. $CG\times DG = AG\times BG+AD\times BG+AG\times BC+AD\times BC$

$$CG\times DG-AG\times BG = AD\times BG+AG\times BC+AD\times BC$$

mithin

$$\left.\begin{matrix}\Delta DGC-\Delta AGB\\ \text{Viereck } ABCD\end{matrix}\right\} = \frac{CG\times DG-AG\times BG}{2\sin.\,tot.}\ \sin.\,G$$

$$= \frac{AD\times BG+AG\times BC+AD\times BC}{2\sin.\,tot.}\ \sin.\,G$$

$$= \frac{AB\times AD\sin.BAD+AB\times BC\sin.ABC+AD\times BC\sin.(BAD+ABC-2R)}{2\sin.\,tot.}$$

$$= \frac{AB\times AD\sin.BAD+AB\times BC\sin.ABC-AD\times BC\sin.(BAD+ABC)}{2\sin.\,tot.}$$

Dieser Ausdruk läßt sich auch unmittelbar so beweisen.

Man verlängere (*Fig.* 48. 49.) die BE, bis sie die wo nöthig verlängerte Seite DC in H schneidet; und ziehe die BD, AH, AC, AE, CE.

$$\text{Da, sowohl als } \left.\begin{matrix}\Delta DBH:\Delta CBH\\ \Delta DEH:\Delta CEH\end{matrix}\right\} = DH:CH \text{ (VI, 1.)}$$

$$\text{so ist auch od. (I, 34.) } \left.\begin{matrix}\Delta DBE\\ \Delta ADE\end{matrix}\right\}:\Delta CBE = DH:CH \text{ (V, 17.)}$$

$$\text{aber od. (I, 37.) } \left.\begin{matrix}\Delta ADH\\ \Delta ADE\end{matrix}\right\}:\Delta CAH = DH:CH \text{ (VI, 1.)}$$

$$\text{folglich } \Delta CBE = \Delta CAH \text{ (V, 11. 9.)}$$

Da nun das Viereck

$$ABCD = \Delta ABC + \Delta ACD$$

$$= \begin{cases} \Delta ABC + \Delta ADH - \Delta CAH & \textit{Fig. 48.} \\ \Delta ABC + \Delta ADH + \Delta CAH & \textit{Fig. 49.} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \Delta ABC + \Delta ADE - \Delta CBE & \textit{Fig. 48.} \\ \Delta ABC + \Delta ADE + \Delta CBE & \textit{Fig. 49.} \end{cases}$$

so ist der Inhalt des Vierecks *Fig.* 48.

$$= \frac{AB \times BC \sin. ABC + AD \times DE \sin. ADE - BC \times BE \sin. CBE}{2 \sin. tot.}$$

$$= \frac{AB \times BC \sin. ABC + AB \times AD \sin. BAD - BC \times AD \sin. (BAD + ABC)}{2 \sin. tot.}$$

und *Fig.* 49.

$$= \frac{AB \times BC \sin. ABC + AD \times DE \sin. ADE + BC \times BE \sin. CBE}{2 \sin. tot.}$$

$$= \frac{AB \times BC \sin. ABC + AB \times AD \sin. BAD + BC. AD \sin. (BAD + ABC - 2R)}{2 \sin. tot.}$$

$$= \frac{AB \times BC \sin. ABC + AB \times AD \sin. BAD - BC \times AD \sin. (BAD + ABC)}{2 \sin. tot.}$$

Eine andere Methode, die übrigen Winkel des Vierecks und die vierte Seite zu berechnen, bietet folgende Construktion dar. Man fälle auf die wo nöthig verlängerte an dem gesuchten Winkel ADC (*Fig.* 51.) liegende gegebene Seite AD die Perpendikel BE, CF aus den übrigen Ecken des Vierecks; und ziehe durch C die CG mit AD parallel, welche das Perpendikel BE in G schneide. In den rechtwinklichten Dreyecken ABE, BCG, sind die Hypotenusen AB, BC, und die Winkel $BAE, BCG = 2R - (DAB + ABC)$ gegeben; folglich kann man BE, AE, BG, CG finden.

Es ist nämlich (§. 18. 31.)

$$\text{sin. tot.} : \begin{Bmatrix} \text{sin. BAE} \\ \text{Cosin. BAE} \end{Bmatrix} = AB : \begin{Bmatrix} BE \\ AE \end{Bmatrix}$$

$$\text{sin. tot.} : \begin{Bmatrix} \text{sin. BCG} \\ \text{Cosin. BCG} \end{Bmatrix} = BC : \begin{Bmatrix} BG \\ GC \end{Bmatrix}$$

mithin $BE = \frac{AB \sin. BAE}{\sin. tot.}$

$AE = \frac{AB \cos. BAE}{\sin. tot.}$

$BG = \frac{BC \sin. BCG}{\sin. tot.}$

$GC = \frac{BC \cos. BCG}{\sin. tot.}$

Alsdenn hat man $CF = GE = BE - BG$;

$DF = AF - AD = AE + FE - AD = AE + GC - AD$

Man kennt also in dem bey F rechtwinklichten Dreyek FDC die zwey Seiten DF, CF um den rechten Winkel; folglich hat man

$$CD^q = FD^q + CF^q \quad (I, 47.)$$

und $DF : CF = \sin. tot. : \begin{cases} \text{Tang. FDC} & (\S. 64.) \\ \text{Tang. } (2R - ADC) \end{cases}$

mithin $\left.\begin{matrix} \text{Tang. FDC} \\ \text{Tang. } (2R - ADC) \end{matrix}\right\} = \frac{CF}{DF} \sin. tot. = \frac{BE - BG}{AE + GC - AD} \sin. tot.$

$$= \frac{AB \sin. BAE - BC \sin. BCG}{AB \frac{\cos. BAE}{\sin. tot.} + BC \frac{\cos. BCG}{\sin. tot.} - AD}$$

$$= \frac{AB \sin. BAD - BC \sin. (DAB + ABC)}{AB \cos. BAD - BC \cos. (DAB + ABC) - AD \, s. t.} \sin. tot.$$

Wenn der Winkel FDC auf die zulezt angezeigte Art gefunden worden ist; so läßt sich die Seite CD nach §. 73. berechnen. Es ist nämlich

$\left.\begin{matrix} \text{Cosin. FDC} : \sin. tot. \\ \sin. tot. : \sec. FDC \end{matrix}\right\} = FD : CD$

$$CD = \frac{FD \sec. FDC}{\sin. tot.}$$

$$= \left(AB \frac{\cos. BAD}{\sin. tot.} - BC \frac{\cos. (DAB + ABC)}{\sin. tot.} - AD\right) \frac{\sec. FDC}{\sin. tot.}$$

Ebenso findet sich für den Fall, wo $DAB + ABC > 2R$ aber $< 3R$

$$\left.\begin{matrix}\text{Tang. FDC}\\ \text{Tg.}(2R-ADC)\end{matrix}\right\} = \frac{AB \sin. BAD + BC \sin. (DAB + ABC - 2R)}{AB \text{ Cosin. } DAB + BC \text{ Cosin.} (DAB + ABC - 2R) - AD} \text{ s.t.}$$

und wenn $DAB + ABC > 3R$

$$\left.\begin{matrix}\text{Tang. FDC}\\ \text{Tg.}(2R-ADC)\end{matrix}\right\} = \frac{AB \sin. BAD + BC \sin. (4R - (DAB + ABC))}{AB \text{ Cosin. } DAB - BC \text{ Cosin.} (4R - (DAB + ABC)) - AD} \text{ s.t.}$$

§. 115.

Um die Regel zur Berechnung der Tangente von $\left\{\begin{matrix}FDC\\ 2R-ADC\end{matrix}\right\}$ welche dem Fall *Fig.* 51. angepaßt ist, auf alle ähnliche Fälle ausdehnen zu können, ist noch nöthig zu erklären, was es mit den Cosinus der Winkel, welche größer als zwey rechte sind, für eine Beschaffenheit habe. Des stumpfen Winkels ACG (*Fig.* 17.) Cosinus CH ist negativ (§. 42.); und wächst mit dem stumpfen Winkel immer mehr, bis der Schenkel CG auf den Durchmesser AB zu liegen kommt, wo er am größten und dem Halbmesser gleich wird. Daher ist Cosin. $180° = -$ sin. tot. Wächst der Winkel noch ferner und geht in den Winkel ACg über, welcher größer als zwey rechte ist: so nimmt sein Cosinus CH wieder ab, liegt aber, so lange $ACg < 3R$ noch immer auf derselben Seite der Spize des Winkels C, auf welcher vorher die Cosinus der stumpfen Winkel lagen, und ist folglich ebenfalls negativ. Wenn daher A einen Winkel $> 2R$, aber kleiner $< 3R$ bezeichnet: so ist, weil CH auch der Cosinus des spizen Winkels BCG, Cosin. $(A - 2R) = -$ Cosin. A

oder $-$ Cosin. $(2R - A) =$ Cosin. A

Wird der Winkel $= 3R$ oder $= 270°$: so steht der eine Schenkel dC auf dem andern AC senkrecht; folglich verschwindet das Segment CH, oder es ist Cosin. $3R$ oder Cosin. $270° = 0$.

Wenn endlich der Winkel größer als $3R$ wird, wie ACe nach der Richtung ADBde gerechnet: so kommt sein Cosinus CF wieder zum Vorschein, aber auf derselben Seite der Spize des Winkels C, auf welcher die Cosinus der spizen Winkel ACE liegen. Bezeichnet man also einen Winkel, welcher $> 3R$ mit B: so ist, weil CF auch der Cosinus des spizen

Winkels ACe, Cosin. (4R - B) = Cosin. B

Hienach verwandeln sich die am Ende des 114. §. gegebenen Ausdrüke für die Tangente des äusseren Winkels FDC des Viereks in folgenden

$$\left.\begin{matrix}\text{Tang. FDC}\\ \text{Tang.(2R-ADC)}\end{matrix}\right\} = \frac{AB\sin.BAD - BC\sin.(DAB+ABC)}{AB\,\text{Cosin.}BAD - BC\,\text{Cosin.}(DAB+ABC) - AD\,\text{s.t.}}\ \text{s.t.}$$

wie für den Fall *Fig* 51.

Da - Tang. (2R - ADC) = Tang. ADC (§. 93.); so ist auch

$$\text{Tang. ADC} = \frac{AB\sin.BAD - BC\sin.(DAB+ABC)}{AD\,\text{s.t.} - AB\,\text{Cosin.}BAD + BC\,\text{Cosin.}(DAB+ABC)}\ \text{s.t.}$$

Beyspiel. *Fig.* 48.

AD = 417
AB = 914
BC = 518 } Fuß.

DAB = 82°
ABC = 83
DAB+ABC = 165
180
CBE = 15

Lg. $\left\{\begin{matrix}BE\\AD\end{matrix}\right\}$ = 2,6201361

Lg.sin. $\left\{\begin{matrix}BFE\\ABC\end{matrix}\right\}$ = 9,9967507

2,6233854

Lg. sin. CBE = 9,4129962

Lg.sin. $\left\{\begin{matrix}BEF\\BAD\end{matrix}\right\}$ = 9,9957528

Lg. EF = 2,0363816; EF = 108,73807

Lg. BF = 2,6191382; BF = 416,04298

ΔCFD nach §. 76.

Lg. DF = 2,9059371 DF = 805,26193

Lg. CF = 2,0084171 CF = 101,95702

Lg. $\frac{DF}{CF}$ = 0,8975200 $\frac{DF}{CF}$ = 7,8980527

Lg. $\frac{CF}{DF}$ = 9,1024800-10; $\frac{CF}{DF}$ = 0,1266135

Lg. CF × DF = 4,9143542 8,0246662

Lg. 7,7809276 = 0,8910314 $\frac{2\text{Cos. F}}{\text{sin. tot.}}$ = 0,2437386

Lg. CD^2 = 5,8053856 7,7809276

Lg. CD = 2,9026928; CD = 799,2687 F.

Berechnung der Winkel nach §. 77.

Lg. sin. CFD =	9,9967507		
Lg. CD =	2,9026928		180° 0′
	7,0940579	DAB =	82 0
Lg. DF =	2,9059371	ADE =	98 0
Lg. CF =	2,0084171	DCB =	89°43′30″
Lg. sin. DCB =	9,9999950;	CDF =	7 16 25,9
Lg. sin. CDF =	9,1024750;	ADE =	98 0 0
		ADC =	105 16 25,9
ΔCFD nach §. 81.		BAD =	82 0 0
DF =	805,26193	ABC =	83 0 0
CF =	101,95702		270 16 25,9
DF-CF =	703,30491		359 59 60,0
DF+CF =	907,21895	DCB =	89 43 34,1
Lg. Tg. ½ Sume =	10,0531916	DFC =	83 0
Lg. (DF-CF) =	2,8471437		180 0
	12,9003353;		97 0
Lg. (DF+CF) =	2,9577120	$\frac{DCF+FDC}{2}$ =	48 30 0
Lg. Tg. ½ Unts. =	9,9426233;	$\frac{DCF-FDC}{2}$ =	41 13 34,15
Lg. DF =	2,9059371		
Lg. sin. DCF =	9,9999950	DCF / DCB =	89 43 34,15
	2,9059421	FDC =	7 16 25,85
Lg. sin. DFC =	9,9967507	ADE =	98 0 0,00
Lg. CD =	2,9026928;	ADC =	105 16 25,85
		CD =	799,2687 F.

Berechnung durch die Dreyeke ABG, DCG.

Lg. AB =	2,9609462	BAG =	82°0
Lg.sin.(A+B) =	9,4129962	ABG =	83 0
	3,5479500	A+B =	165 0
			180 0
Lg. sin. BAG =	9,9957528;	AGB =	15 0
Lg. sin. ABG =	9,9967507;		
Lg. BG =	3,5437928	BC =	518
Lg. AG =	3,5447007	AD =	417
Lg.Tg.½Summe =	10,8805709	BG =	3497,058
Lg.(GD-GC) =	2,0376018;	AG =	3505,102
	12,9181727	GC =	2979,058
Lg.(GD+GC) =	3,7829855	GD =	3088,102
Lg. Tg.½Unterf. =	9,1351872;	GD-GC =	109,044
Lg. GD =	3,4896917	GD+GC =	6067,160
Lg. GC =	3,4740790	GCD+GDC =	165° 0′
Lg. sin. GCD =	9,9999950	$\frac{GCD+GDC}{2}$ =	82 30 0″
Lg. sin. GDC =	9,9843824	$\frac{GCD-GDC}{2}$ =	7 46 25,7
	3,4896917	GCD =	90 16 25,7
	3,4896966	GDC =	74 43 34,3
Lg. sin. CGD =	9,4129962		179 59 60
Lg. CD =	2,902692 {9 8	BCD =	89 43 34,3
Lg. AG =	3,5447007	ADC =	105 16 25,7
Lg. BG =	3,5437028	CD =	799,268 {9 7 F.
Lg. sin. G =	9,4129962		
	6,5013997		
Lg. 2 =	0,3010300		
Lg. ΔABG =	6,2003697	ΔABG =	1586243 QF.
Lg. GD =	3,4896917		
Lg. GC =	3,4740790		
Lg. sin. G =	9,4129962		
	6,3767669		
Lg. 2 =	0,3010300		
Lg. ΔDGC =	6,0757369	ΔDGC =	1190521 QF.
		Viereck ABCD =	395722 QF.

Berechn. des Inhalts unmittelbar aus den gegebenen Stüken.

Lg. AB =	2,9609462	
Lg. AD =	2,6201361	
Lg. sin. DAB =	9,9957528	
	5,5768351 ;	377428,9 Q. F.
Lg. AB =	2,9609462	
Lg. BC =	2,7143298	
Lg. sin. ABC =	9,9967507	
	5,6720267 ;	469923,0
Lg. AD =	2,6201361	847351,9
Lg. BC =	2,7143298	
Lg. sin. (BAD + ABC) =	9,4129962	
	4,7474621 ;	55906,4
		2) 791445,5
	Vierek ABCD =	395722,75 Q. F.

Berechnung des Viereks durch Perpendikel. *Fig.* 51.

$\left.\begin{matrix} BAD \\ BAE \end{matrix}\right\} = 82°$

$ABC = 83$

$A+B = 165$

180

$BCG = 15$

Lg. AB =	2,9609462	
Lg. sin. BAE =	9,9957528	
Lg. Cosin. BAE =	9,1435553	
Lg. BE =	2,9566990 ;	BE = 905,1050 Fuß.
Lg. AE =	2,1045015 ;	AE = 127,2042
Lg. BC =	2,7143298	
Lg. sin. BCG =	9,4129962	
Lg. Cosin. BCG =	9,9849438	
Lg. BG =	2,1273260 ;	BG = 134,0683
Lg. $\left\{\begin{matrix} GC \\ FE \end{matrix}\right\}$ =	2,6992736 ;	FE = 500,3497
		CF = 771,0367
Lg. CF sin. tot. =	12,8870751 ;	AF = 627,5539
Lg. DF =	2,3233632 ;	AD = 417,0000
Lg. Tg. FDC =	10,5637119 ;	DF = 210,5539
C.ar.Lg.Cos.FDC =	0,5793296 ;	FDC = 74° 43′ 34″,08
Lg. CD =	2,9026928 ;	179 59 60
CD =	799,2687 F.	ADC = 105 16 25,92

Anmerkungen.

1.) die Sin. DCB, Sin. FDC lassen zwar im allgemeinen die Größe der ihnen entsprechenden Winkel unentschieden (§. 14. 24.). In gegenwärtigem Fall sind aber schon die drey Seiten des Dreyeks DCF bekannt, folglich sind auch die Winkel bestimmt.

2.) der Winkel DCB = 89° 43′ 34″,1, welchen man mittelst des Winkels CDF und des Sazes, daß die Summe der vier Winkel am Umfang des Viereks vier rechten gleich ist, bestimmt hat, ist um 4,1 Sek. größer als derjenige, welcher dem Lg. sin. DCB in den Tafeln entspricht. Da aber dieser Winkel wenig von einem rechten verschieden ist, so kann er aus seinem Sinus durch die gewöhnliche trigonometrische Tafeln nicht bis auf einzelne Sekunden genau bestimmt werden, weil eine Aenderung in der lezten Ziffer des Lg. sin. 89° 43′ 30″ um eine Einheit den ihm entsprechenden Winkel schon um 10. Sek. ändert. Daher ist der Winkel DCF = 89° 43′ 34″,1 genauer als der aus dem Log. sin. DCF geschlossene 89° 43′ 30″, wie auch die nachfolgenden Rechnungen zeigen.

3.) die Berechnungsart durch die Dreyeke AGB, DGC ist zwar ebenso kurz als die vorhergehende. Sie wird aber unbequem und weniger genau, wenn die Summe der gegebenen Winkel wenig von zwey rechten verschieden ist. In diesem Fall werden nämlich die Seiten AG, BG, des Dreyeks AGB sehr gros, so daß man sie durch die gemeinen Tafeln nicht genau wird bestimmen können. Daher können auch leicht die Winkel ADC, BCD etwas unrichtig werden, besonders wenn die Fehler in den Seiten AG, BG einander entgegengesezt sind.

§. 116.

In dem Vierek ABCD (*Fig.* 48. 49. 50 52.) sind die drey aneinander liegende Seiten DA, AB, BC, und die zwey an der vierten Seite CD liegende Winkel ADC, BCD

gegeben: man sucht diese vierte Seite CD, die übrigen zwey Winkel BAD, ABC, und den Inhalt des Viereks.

Wenn erstlich die gegebenen Winkel ADC, BCD zusammen zwey rechte machen (*Fig.* 50.), folglich die ihnen anliegenden Seiten AD, BC parallel sind, so ziehe man durch den Endpunkt D der kleineren AD die Parallele DF mit der Seite AB, welche der gesuchten gegenüber liegt. Alsdenn ist (I, 34.) DF = AB; CF = BC - BF = BC - AD. In dem Dreyek DCF sind mithin zwey Seiten DF, CF und ein Winkel DCF gegeben, woraus man nach §. 24. u. f. §. 106. den Winkel DFC = ABC und die Seite CD berechnen kann. Des Viereks Inhalt ist = Parallelogramm ABFD + ΔCDF, wovon ersteres $= \frac{DA \times AB \sin. DAB}{\sin. tot.}$, lezteres nach §. 24. berechnet wird.

Soll diese Aufgabe bestimmt seyn, so darf $\left[\begin{matrix} DF \\ AB \end{matrix}\right]$ nicht kleiner seyn als $\left\{\begin{matrix} CF \\ BC - AD \end{matrix}\right.$ (§. 24. 25.)

Es seyen zweytens ADC + BCD $\gtreqless$ 2R (*Fig.* $\begin{matrix} 48. \\ 49. \end{matrix}$)

In diesem Fall ziehe man mit den Seiten AB, AD die Parallelen DE, BE; welche die wo nöthig verlängerte Seiten CD, BC in F und H schneiden. In dem Dreyek BCH kennt man jezt die Seite BC, und die Winkel BCH = $\left[\begin{matrix} 2R - BCD \ (Fig. 48.52.) \\ BCD \ (Fig. 49.) \end{matrix}\right.$, BHC = $\left[\begin{matrix} 2R - ADC \ (Fig. 48.52.) \\ ADC \ (Fig. 49.) \end{matrix}\right.$

$$CBH = \left[\begin{matrix} DCB - BHC = DCB + ADC - 2R \ (Fig. 48.52.) \\ DHB - DCB = 2R - (DCB + ADC) \ (Fig. 49.) \end{matrix}\right.$$

folglich ist (§. 18.)

$$BH = \frac{BC \sin. BCH}{\sin. BHC} = \frac{BC \sin BCD}{\sin. ADC}$$

$$CH = \frac{BC \sin. CBH}{\sin. BHC} = \left\{\begin{matrix} \frac{BC \sin. (ADC + DCB - 2R)}{\sin. ADC} \ (Fig. 48.) \\ \frac{BC \sin. (ADC + DCB)}{\sin. ADC} \ Fig. 49. \end{matrix}\right.$$

mithin $\left.\begin{matrix} BH-AD \\ BH-BE \\ HE \end{matrix}\right\} = \frac{BC \sin. BCD}{\sin. ADC} - AD.$

Demnach sind die zwey Seiten $\left[\begin{matrix} DE \\ AB \end{matrix}\right]$, HE des Dreyecks DHE, und der Winkel $DHE = 2R - ADC$, welcher der Seite DE gegenüber liegt, gegeben; und die Aufgabe ist wieder auf die §. 24. zurükgeführt; mithin bestimmt, wenn $\left[\begin{matrix} DE \\ AB \end{matrix}\right]$ nicht kleiner als HE, oder AB nicht kleiner als $\frac{BC \sin. BCD}{\sin. ADC} - AD$ (§. 24.); aber unbestimmt, wenn $AB < \left\{\begin{matrix} HE \\ \frac{BC \sin. BCD}{\sin. ADC} - AD \end{matrix}\right.$ (§. 25.)

Im Fall die Aufgabe bestimmt ist, hat man ferner

$$\sin. HDE = \frac{HE \sin. DHE}{DE} = \frac{HE}{AB} \sin. ADC$$

$$= \frac{BC}{AB} \sin. BCD \cdot \frac{AD}{AB} \sin. ADC$$

$$DH = \frac{DE \sin. DEH}{\sin. DHE} = \frac{AB \sin. (ADC - HDE)}{\sin. ADC}$$

$$\left.\begin{matrix} DH \mp CH \\ CD \end{matrix}\right\} = \begin{cases} \frac{AB \sin.(ADC-HDE) - BC \sin.(DCB+ADC-2R)}{\sin. ADC} & \textit{Fig.} 48. \\ \frac{AB \sin.(ADC-HDE) + BC \sin.(DCB+ADC)}{\sin. ADC} & \textit{Fig.} 49. \end{cases}$$

Oder allgemein (§. 113.)

$$CD = \frac{AB \sin.(ADC-HDE) + BC \sin.(DCB+ADC)}{\sin. ADC}$$

Inhalt des Vierecks = Trapez. $ABHD \mp \triangle CBH$ *Fig.* 48. 49.

$$= \frac{AD+BH}{2} \times \frac{AB \sin. DAB}{\sin. tot.} \mp \frac{BC \times BH \sin. CBH}{2 \sin. tot.} \quad \textit{Fig.} 48. 49.$$

$$= \frac{AD+BH}{2} \times \frac{AB \sin. DAB}{\sin. tot.} + \frac{BC \times BH \sin.(DCB+ADC)}{2 \sin. tot.}$$

Die vierte Seite CD und den Inhalt des Vierecks kann man unmittelbar durch die gegebenen Seiten auf folgende Art ausdrüken. (*Fig.* 54. 55.)

Man fälle aus den Endpunkten A, B der Seite AB, welche der unbekannten CD, gegenüber liegt, die Perpendikel AJ, BK auf die wo nöthig verlängerte CD; und ziehe durch den Endpunkt A des kleineren Perpendikels die Parallele AL mit CD, welche das andere Perpendikel BK in L schneide. In den rechtwinklichten Dreyen ADJ, BCK kennt man die Hypotenusen AD, BC, und die Winkel BCK, ADJ, welche in dem Fall *Fig.* 54. die Supplemente der gegebenen Winkel BCD, ADC sind. Man kann also BK, CK, AJ, DJ finden: folglich hat man auch $BL = BK - AJ$ und $\left.\begin{matrix} AL^q \\ JK^q \end{matrix}\right\} = \begin{cases} AB^q - BL^q & (I, 47.); \\ (AB+BL)(AB-BL) & (II, 5.) \end{cases}$

alsdenn $CD = JK \mp (DJ + CK)$ *Fig.* $\begin{matrix} 54. \\ 55. \end{matrix}$

Berechnung.

$$AJ = \frac{AD \sin. ADJ}{\sin. tot.} = \frac{AD \sin. ADC}{\sin. tot.}$$

$$DJ = \frac{AD \operatorname{Cosin.} ADJ}{\sin. tot.} = \mp \frac{AD \operatorname{Cosin.} ADC}{\sin. tot.} \quad \textit{Fig.} \begin{matrix} 54. \\ 55. \end{matrix}$$

$$BK = \frac{BC \sin. BCK}{\sin. tot.} = \frac{BC \sin. BCD}{\sin. tot.}$$

$$CK = \frac{BC \operatorname{Cosin.} BCK}{\sin. tot.} = \mp \frac{BC \operatorname{Cosin.} BCD}{\sin. tot.} \quad \textit{Fig.} \begin{matrix} 54. \\ 55. \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} BK - AJ \\ BL \end{matrix}\right\} = \frac{BC \sin. BCD - AD \sin. ADC}{\sin. tot.}$$

$$DJ + CK = \mp \frac{BC \operatorname{Cosin.} BCD + AD \operatorname{Cosin.} ADC}{\sin. tot.}$$

$$JK = AL = \sqrt{AB^q - \left(\frac{BC \sin. BCD - AD \sin. ADC}{\sin. tot.}\right)^2}$$

$$CD = \frac{BC \operatorname{Cosin.} BCD + AD \operatorname{Cosin.} ADC}{\sin. tot.} + \sqrt{AB^q - \left(\frac{BC \sin. BCD - AD \sin. ADC}{\sin. tot.}\right)^2}$$

Inhalt des Vierecks $= \text{Trapez. } ABKJ \mp (\triangle ADJ + \triangle BCK)$

$$= \frac{BK + AJ}{2} \times JK \mp \frac{AJ \times DJ + BK \times CK}{2}$$

$$= \frac{BC\sin.BCD + AD\sin.ADC}{2\sin.tot.} \times \sqrt{AB^q - \left(\frac{BC\sin.BCD - AD\sin.ADC}{\sin.tot.}\right)^2}$$

$$+ \frac{AD^q \sin.ADC \cos.ALC + BC^q \sin.BCD \cos.BCD}{2\sin.tot.^2}$$

Der Winkel BAL ist einerley mit dem Winkel HDE *Fig.* 48. 49. Beyde sind nämlich der Ueberschuß der Summe der Winkel bey A und D über zwey rechte. Man hat also auch

$$AB : \left[\frac{BL}{\frac{BC\sin.BCD - AD\sin.ADC}{\sin.tot.}}\right] = \sin.tot. : \begin{bmatrix}\sin.BAL\ Fig.\ 54.55.\\ \sin.HDE\ Fig.\ 48.49.\end{bmatrix}$$

und $\left.\begin{matrix}\sin.HDE\\ \sin.BAL\end{matrix}\right] = \frac{BC}{AB} \sin.BCD - \frac{AD}{AB} \sin.ADC$, wie oben.

Wenn $HE \gtrless \begin{bmatrix}DE\\ AB\end{bmatrix}$ ist (*Fig.* 52.): so ist, wie schon oben bemerkt worden ist, das Dreyek HDE (§. 25.); folglich auch das Vierek unbestimmt, den Fall ausgenommen, wo der Winkel HDE ein rechter wird (*Fig.* 53.). Es entsprechen nämlich alsdenn den gegebenen Stüken zwey verschiedene Viereke; welches, wie im §. 25. kein Fehler des trigonometrischen Calculs ist, und ebenfalls bey der geometrischen Construktion Statt hat. Man verzeichne an einer der zwey Seiten, welche an der gesuchten CD liegen, z. B. an der CB, das Dreyek CBH, dessen Winkel BCH, CHB die Supplemente der gegebenen DCB, CDA, im Fall sie zusammen mehr als zwey rechte betragen (*Fig.* 48.), im Fall sie aber zusammen kleiner als zwey rechte sind, (*Fig.* 49.) die gegebenen Winkel selbst seyen. Von der Seite BH schneide man BE = der gegenüberliegenden gegebenen Seite AD ab; und beschreibe aus E mit einem Halbmesser = der dritten, der gesuchten CD gegenüberliegenden, Seite AB einen Kreis, welcher die verlängerte HC, wenn das Vierek möglich ist, entweder berühren (*Fig.* 53.) oder in zwey Punkten D, d (*Fig.* 52.) auf einerley Seite von C schneiden wird. Man ziehe ED, Ed, und vollende die Parallelogramme

BEDA, BEda: so werden ABCD, aBCd zwey Vierecke seyn, welche die gegebenen Stüke haben. Es ist nämlich AD = ad = BE; AB = DE = dE = aB (I. 34.), die Seite BC und der Winkel dCB beyden Vierecken gemein, endlich der Winkel CDA = Cda (I, 29.). Ebendiß gibt die trigonometrische Berechnung. Dem Sin. HDE entsprechen die zwey Winkel HDE und dDE = HdE (I, 5.) deren Unterschied der Winkel DEd = ABa ist. In dem besondern Fall, wenn der Kreisbogen Dd die HJ nur berührt (*Fig.* 53.), das Dreyek EDH also rechtwinklicht ist, wird die Aufgabe bestimmt. Ebenso läßt sich das Viereck verzeichnen, wenn BCD + ADC = 2R; indem man den Winkel BCD = dem gegebenen Winkel bey C macht, und nun von der BC selbst die BE = AD abschneidet, alsdenn die Construktion wie vorhin vollendet.

1.) Beyspiel. *Fig.* 48.

AB = 914 Fuß.
AD = 417
BC = 518

ADC = 105° 16′ 25″,9
BCD = 89 43 34,1
BCD + ADC = 195 0 0
− 180
CBH = 15 0 0

Lg. BC = 2,7143298
Lg. sin. BCD = 9,9999950
12,7143248
Lg. AB = 2,9609462
9,7533786; $\frac{BC}{AB}$ sin. BCD = 5667331

Lg. AD = 2,6201361
Lg. sin. ADC = 9,9843822
12,6045183
Lg. AB = 2,9609462
9,6435721; $\frac{AD}{AB}$ sin. ADC = 4401210

sin. HDE für den Halbm. 10 000 000 } = 1266121

Lg. AB =	2,9609462	HDE =	7° 16' 25",9
Lg. sin. DEH =	9,9957528	ADC =	105 16 25,9
	12,9566990	DEH =	98 0 0
Lg. sin. ADC =	9,9843822		180
Lg. DH =	2,9723168	DAB =	82 0 0
Lg. BC =	2,7143298	DCB =	89 43 34,1
Lg. sin. CBH =	9,4129962	HDE =	7 16 25,9
	12,1273260		97 0 0
Lg. sin. ADC =	9,9843822		180
Lg. CH =	2,1429438	ABC =	83 0 0
Lg. BC sin. BCD =	12,7143248	(Siehe oben) DH =	938,246
Lg. sin. ADC =	9,9843822	CH =	138,977
Lg. BH =	2,7299426;	CD =	799,269
		AD =	417,0000
Lg. $\left(\frac{AD+BH}{2}\right)$ =	2,6785006	BH =	536,9608
Lg. AB =	2,9609462		953,9608
Lg. sin. DAB =	9,9957528	$\frac{AD+BH}{2}$ =	476,9804
Lg. ABHD =	5,6351996;	ABHD =	431717,4 □F.
Lg. BC =	2,7143298		
Lg. BH =	2,7299426		
Lg. sin. CBH =	9,4129962		
	4,8572686		
Lg. 2 =	0,3010300		
Lg. ΔCBH =	4,5562386;	ΔCBH =	35994,7 □F.
		Viereck ABCD =	395722,7 □F.

Berechnung durch Perpendikel. *Fig.* 56.

Lg. BC =	2,7143298		
Lg. sin. BCD =	9,9999950		
Lg. Cosin. BCD =	7,0794060		
	2,7143248;	$\frac{BC \sin. BCD}{\text{sin. tot.}}$ =	517,9940
	0,3937358;	$\frac{BC \text{ Cos. } BCD}{\text{sin. tot.}}$ =	2,4759
Lg. AD =	2,6201361		
Lg. sin. ADC =	9,9843822		
Lg. Cosin. ADC =	9,4206702		
	2,6045183;	$\frac{AD \sin. ADC}{\text{sin. tot.}}$ =	402,2706
	2,0408063;	$\frac{AD \text{ Cos. } ADC}{\text{sin. tot.}}$ =	-109,8515
Lg. (AB+BL) =	3,0127205	BL =	115,7234
Lg. (AB-BL) =	2,9021533	AB =	914
Lg. JK^q =	5,9148738	AB+BL =	1029,7234
Lg. JK =	2,9574369;	AB-BL =	798,2766
Lg. BL sin. tot. =	12,0634212	JK =	906,0421
Lg. AB =	2,9609462	$\frac{BC \text{ Cos. } BCD}{\text{sin. tot.}}$ =	2,4759
Lg. sin. BAL =	9,1024750		909,1180
BAL =	7° 16' 25,9	$\frac{AD \text{ Cos. } ADC}{\text{sin. tot.}}$ =	-109,8515
das übrige wie vorhin.		CD =	799,2065
Berechnung des Inhalts.		$\frac{BC \sin. BCD}{\text{sin. tot.}}$ =	517,9940
Lg. 460,1323 =	2,6628827	$\frac{AD \sin. ADC}{\text{sin. tot.}}$ =	402,2706
Lg. JK =	2,9574369		920,2646
Lg. ABKJ =	5,6203196;		460,1323
Lg. AD^q =	5,2402722	Trapez.	
Lg. sin. ADC =	9,9843822	ABKJ =	417176,3
Lg. Cos. ADC =	9,4206702		
	4,6453246;	$\frac{AD^q \text{s.D Cs.D}}{\text{sin. tot.}^2}$ =	-44190,6
Lg. BC^q =	5,4286596		
Lg. sin. BCD =	9,9999950		
Lg. Cos. BCD =	7,0794060	$\frac{BC^q \text{s.C Cs.C}}{\text{sin. tot.}^2}$ =	1282,5
	3,1080006;		-42908,1
		Hälfte =	-21454,05
		Viereck ABCD =	395722,25

2. Beyspiel. *Fig.* 52.

DA = 540
AB = 480 } Fuß.
BC = 1120

ADC = 151° 0′
BCD = 39 20
190 20
180
CBH = 10 20

Lg. BC = 3,0492180
Lg. sin. BCD = 9,8019735
12,8511915
Lg. AB = 2,6812412
10,1699503; 14789391

Lg. AD = 2,7323938
Lg. sin. ADC = 9,6855712
12,4179650
Lg. AB = 2,6812412
9,7367238; 5454106

sin. {HDE / HdE} = 9335285

Lg. AB = 2,6812412
Lg. sin. DEH = 9,8079922
Lg. sin. dEH = 9,9957616
12,4892334
12,6770028
Lg. sin. ADC = 9,6855712
Lg. DH = 2,8036622
Lg. dH = 2,9914316
Lg. BC = 3,0492180
Lg. sin. CBH = 9,2537609
12,3029789
Lg. sin. ADC = 9,6855712
Lg. CH = 2,6174077

HdE = 68° 59′ 30″
HDE = 111 0 30
ADC = 151 0 0
dEH = 82 0 30
DEH = 39 59 30
179 59 60
daB = 97 59 30
DAB = 140 0 30
DCB = 39 20 0
HdE = 68 59 30
HDE = 111 0 30
108 19 30
150 20 30
179 59 60
aBC = 71 40 30
ABC = 29 39 30
CH = 414,3885 Fuß.
DH = 636,3044
dH = 980,4639
CD = 221,9159
Cd = 566,0754

3. Beyspiel. *Fig.* 53.

AB = 300 Fuß.
BC = 700
AD = 360

ADC = 143° 7′ 48″,36
BCD = 47 29 18,95
190 37 7,31
180
CBH = 10 37 7,31

Lg. BC = 2,8450980
Lg. sin. BCD = 9,8675517
12,7126497
Lg. AB = 2,4771213
10,2355284; $\frac{BC}{AB}$ sin. BCD = 17200000

Lg. AD = 2,5563025
Lg. sin. ADC = 9,7781513
12,3344538
Lg. AB = 2,4771213
9,8573325; $\frac{AD}{AB}$ sin. ADC = 7200000
sin. HDE = 10000000

Lg. AB = 2,4771213
Lg. sin. DEH = 9,9030900
12,3802113
Lg. sin. ADC = 9,7781513
Lg. DH = 2,6020600
Lg. BC = 2,8450980
Lg. sin. CBH = 9,2654596
12,1105576
Lg. sin. ADC = 9,7781513
Lg. CH = 2,3324063

HDE = 90° 0′ 0″
ADC = 143 7 48,36
DEH = 53 7 48,36
179 59 60,00
BAD = 126 52 14,64
BCD = 47 29 18,95
HDE = 90 0, 0
137 29 18,95
179 59 60,00
ABC = 42 30 41,0
CH = 214,984 Fuß.
DH = 400,000
CD = 185,016

Anmerkungen.

1.) Da man die Linie HE nicht berechnet hat; so wird die Unterſuchung, ob die Aufgabe beſtimmt ſey, auf folgende Art angeſtellt. Weil $\left.\begin{matrix}DE\\AB\end{matrix}\right\} : HE = \left\{\begin{matrix}\text{sin. } DHE\\\text{sin. } ADC\end{matrix}\right\} : \text{sin. } HDE$: ſo iſt $HE \lesseqgtr AB$, je nachdem $\text{sin. } HDE \lesseqgtr \text{sin. } ADC$; und umgekehrt. In dem erſten Beyſpiel findet man $\text{sin. } HDE < \text{sin. } ADC$; folglich iſt die Aufgabe beſtimmt.

2.) In dem zweyten Beyſpiel iſt $\text{sin. } HDE > \text{sin. } ADC$, und $\text{sin. } HDE \text{ nicht} = \text{sin. tot.}$; folglich, weil HDE kein rechter Winkel iſt, die Aufgabe unbeſtimmt. Man findet nämlich folgende zwey Viereke, welche zu den Bedingungen der Aufgabe paſſen.

AB = 480 Fuß	A = 140° 0' 30"
AD = 540	B = 29 39 30
BC = 1120	C = 39 20 0
CD = 221,9159	D = 151 0 0
aB = 480	a = 97 59 30
ad = 540	B = 71 40 30
BC = 1120	C = 39 20 0
Cd = 566,0754	d = 151 0 0

Wenn man umgekehrt aus den drey gegebenen Seiten und den durch Rechnung gefundenen von ihnen eingeſchloſſenen Winkeln nach §. 114. die andere zwey Winkel berechnet; ſo geben beyde Viereke für dieſe Winkel einerley Werth, nämlich ADC = 151° 0' und BCD = 39° 20'.

3.) In dem dritten Beyſpiel iſt zwar $\text{sin. } HDE > \text{sin. } ADC$. Aber $\text{Sin. } HDE = \text{sin. tot.}$; folglich HDE = 90°, deſſen Supplement ebenfalls = 90°. Die Aufgabe iſt alſo beſtimmt.

§. 117.

Es ſeyen wieder drey aneinander liegende Seiten DA, AB, BC des Viereks ABCD (*Fig.* 54. 55.), und zwey Winkel ABC, BCD gegeben, von welchen der eine ABC

zwischen den gegebenen Seiten AB, BC, der andere BCD an der vierten unbekannten Seite CD liegt.

Man ziehe die Diagonallinie AC, welche die Endpunkte A, C der zwey gegebenen Seiten AB, BC, die den gegebenen Winkel einschliessen, verbindet. In dem Dreyek ABC kennt man zwey Seiten AB, BC und den eingeschlossenen Winkel ABC; man kann also die Seite AC und die Winkel BCA, BAC finden. Alsdenn hat man in dem Dreyek ACD zwey Seiten AC, AD, sammt dem Winkel ACD=BCD-BCA, welcher einer der gegebenen Seiten AD gegenüber liegt; und man erhält nach §. 24. CD und die Winkel ADC, CAD. Die Aufgabe ist also unbestimmt, wenn AC > AD, und der Winkel ADC kein rechter ist (§. 25.); aber bestimmt, wenn AC < AD. Ein Kreis aus A mit dem Halbmesser AD beschrieben wird im ersten Fall die der Lage nach gegebene gerade Linie CD in zwey Punkten D, d auf einerley Seite von C schneiden; und die zwey Viereke ABCD, ABCd werden zu den Bedingungen der Aufgabe passen.

Eine andere Berechnungsart des Vierecks ergiebt sich aus folgender Construktion. Man fälle aus den Endpunkten A, B, der Seite AB, welche der gesuchten CD gegenüber liegt, die Perpendikel AJ, BK auf die wo nöthig verlängerte CD; und ziehe durch den Endpunkt A des kleineren Perpendikels AJ die Parallele AL mit CD, welche das andere Perpendikel BK in L schneide. In den rechtwinklichten Dreyeken ABL, BCK kennt man die Hypotenusen AB, BC, und die Winkel BAL=2R-(ABC+BCD); BCK =2R-BCD (*Fig.* 54.): woraus man BL, AL, BK, CK findet. Alsdenn hat man AJ=KL=BK-BL; folglich in dem rechtwinklichten Dreyek ADJ die Hypotenuse AD und die Seite AJ, woraus man den Winkel ADJ findet. In ebendiesem Dreyek hat man $DJ^q = \begin{cases} AD^q - AJ^q & (I,47.) \\ (AD+AJ)(AD-AJ) & (II,5.) \end{cases}$;

folglich auch $CD = \begin{matrix} KJ \\ AL \end{matrix} \Big\} \mp (CK+DJ)$ *Fig.* $\begin{matrix} 54. \\ 55. \end{matrix}$

oder $Cd \doteq \begin{matrix} KJ \\ AL \end{matrix} \Big\} \mp CK \pm \Big\{ \begin{matrix} dJ \\ DJ \end{matrix} \Big\}$ *Fig.* $\begin{matrix} 54. \\ 55. \end{matrix}$

Die gesuchten Stüke werden sich also auf folgende Art durch die gegebenen ausdrüken lassen.

$$BL = \frac{AB \sin. BAL}{\sin. tot.} = \frac{AB \sin. (ABC + BCD)}{\sin. tot.}$$

$$AL = \frac{AB \operatorname{Cosin.} BAL}{\sin. tot.} = \frac{AB \operatorname{Cosin.} (2R - (ABC + BCD))}{\sin. tot.}$$

$$= - \frac{AB \operatorname{Cosin.} (ABC + BCD)}{\sin. tot.}$$

$$BK = \frac{BC \sin. BCK}{\sin. tot.} = \frac{BC \sin. BCD}{\sin. tot.}$$

$$CK = \frac{BC \operatorname{Cosin.} BCK}{\sin. tot.} = \mp \frac{BC \operatorname{Cosin.} BCD}{\sin. tot.} \quad (Fig. 54. 55.)$$

$$\left.\begin{matrix} AJ \\ KL \end{matrix}\right\} = \frac{BC \sin. BCD - AB \sin. (ABC + BCD)}{\sin. tot.}$$

$$DJ^q = AD^q - \left(\frac{BC \sin. BCD - AB \sin. (ABC + BCD)}{\sin. tot.}\right)^2$$

$$CD = \frac{BC \operatorname{Cosin.} BCD}{\sin. tot.} - \frac{AB \operatorname{Cosin.} (ABC + BCD)}{\sin. tot.}$$

$$\mp \sqrt{AD^q - \left(\frac{BC \sin. BCD - AB \sin. (ABC + BCD)}{\sin. tot.}\right)^2}$$

$$Cd = \frac{BC \operatorname{Cosin.} BCD}{\sin. tot.} - \frac{AB \operatorname{Cosin.} (ABC + BCD)}{\sin. tot.}$$

$$\pm \sqrt{AD^q - \left(\frac{BC \sin. BCD - AB \sin. (ABC + BCD)}{\sin. tot.}\right)^2}$$

$$\left.\begin{matrix} \sin. AD \\ \sin. ADC \\ \sin. AdC \end{matrix}\right\} = \frac{AJ}{AD} \sin. tot. = \frac{BC \sin. BCD - AB \sin. (ABC + BCD)}{AD}$$

$$= \frac{BC}{AD} \sin. BCD - \frac{AB}{AD} \sin. (ABC + BCD)$$

Inhalt des Vierecks

$$= \Delta ABC + \Delta ACD$$

$$= \frac{AB \times BC \sin. ABC}{2 \sin. tot.} + \frac{AD \times CD \sin. ADC}{2 \sin. tot.}$$

$$= \frac{AB \times BC \sin. ABC}{2 \sin. tot.} + \frac{BC \sin. BCD - AB \sin. (ABC + BCD)}{2 \sin. tot.} \times$$

$$\left(\frac{BC \operatorname{Cosin.} BCD - AB \operatorname{Cos.} (ABC + BCD)}{\sin. tot.} \mp \sqrt{AD^q - \left(\frac{BC \sin. BCD - AB \sin. (ABC + BCD)}{\sin. tot.}\right)^2}\right)$$

Wenn AC < AD, folglich die Aufgabe bestimmt ist; so ist auch CJ < DJ. Wollte man also in obigem Ausdruk für CD das Zeichen — gebrauchen; so würde CD negativ werden, d. h. der Punkt D würde auf die andere Seite des Punkts C fallen, und das Vierek würde nicht zu den gegebenen Stüken passen. Man hat also auch hieran ein Kennzeichen, ob die Aufgabe bestimmt ist.

Beyspiel. *Fig.* 54.

AB = 914 Fuß.
BC = 518
AD = 417

AB-BC = 396
AB+BC = 1432

Lg. (AB-BC) = 2,5976952
Lg. Tg. $\frac{1}{2}$Sume = 10,0531916;
12,6508868

Lg. (AB+BC) = 3,1559430
Lg. Tg. $\frac{1}{2}$Unterf. = 9,4949438;
Lg. AB = 2,9609462
Lg. BC = 2,7143298
Lg. sin. ACB = 9,9602478
Lg. sin. BAC = 9,7136313
3,0006984
3,0006985
Lg. sin. ABC = 9,9967507
Lg. AC = 2,997449{1 2
Lg. sin. ACD = 9,6070692
12,604518{3 4
Lg. AD = 2,6201361
Lg. sin. {ADC AdC} = 9,984382{2 3
Lg. AC = 2,997449{1 2
3,0130669

ABC = 83° 0' 0"
BCD = 89 43 34,1
172 43 34,1
179 59 00
BAL = 7 16 25,9

ACB+BAC = 97 0 0
$\frac{ACB+BAC}{2}$ = 48 30 0

$\frac{ACB-BAC}{2}$ = 17 21 27,17
ACB = 65 51 27,17
BAC = 31 8 32,83
BCD = 89 43 34,10
ACD = 23 52 6,93

AC = 994,143{6 8 F.

3,0130669

Lg. sin. DAC = 9,88962 {57 60

Lg. CD = 2,902692 {6 9

CD = 799,268 {3 9

Lg. AB = 2,9609462

Lg. BC = 2,7143298

Lg. sin. ABC = 9,9967507

5,6720267;

Lg. 2 = 0,3010300

Lg. ΔABC = 5,3709967

Lg. AD = 2,6201361

Lg. CD = 2,902692 {6 9

Lg. sin. ADC = 9,984382 {2 3

5,507721 {09 13

Lg. 2 = 0,3010300

Lg. ΔADC = 5,20618 {09 13

AdC = 74°43' {33,97 34,14

179 59 60

ADC = 105 16 {26,03 25,86

ACD = 23 52 6,93

129 8 {32,96 32,79

179 59 60

DAC = 50 51 {27,04 27,21

BAC = 31 8 32,83

BAD = {81 59 59,87 82 0 0,04

ΔABC = 234961,5 Q. F.

ΔADC = 160761, {074 122

Vierek ABCD = 395722, {574 622

Ebenso würde das Vierek ABCd (*Fig.* 54.) berechnet, wenn nach einer Bedingung der Aufgabe der Winkel AdC spiz seyn sollte.

Berechnung durch Perpendikel. *Fig.* 56.

Lg. BC =	2,7143298	
Lg. sin. BCD =	9,9999950	
Lg. Cosin. BCD =	7,6794060	
Lg. BK =	2,7143248;	BK = 517,9940 F.
Lg. CK =	0,3937358	CK = 2,4759
Lg. AB =	2,9609462	
Lg. sin. BAL =	9,1024751	
Lg. Cosin. BAL =	9,9964908	
Lg. BL =	2,0634213;	BL = 115,7234
Lg. AL =	2,9574370;	AL = 906,6437
Lg. AJ sin. tot. =	12,6045183;	AJ = 402,2706
Lg. AD =	2,6201361	CJ = 909,1196
Lg. sin. ADC =	9,9843822	AD = 417,0000
Lg. (AD+AJ) =	2,9134274	AD+AJ = 819,2706
Lg. (AD-AJ) =	1,1681851	AD-AJ = 14,7294
Lg. DJ^q =	4,0816125	DJ, dJ = 109,8515
Lg. DJ =	2,0408062,5	
		CD = 799,2681
		Cd = 1018,9711

§. 118.

Es ist noch der Fall abzuhandeln übrig, wo drey aneinander liegende Seiten DA, AB, BC des Viereks ABCD (*Fig.* 57.) und zwey Gegenwinkel ABC, ADC gegeben sind, wovon der eine ABC zwischen zwey der gegebenen Seiten AB, BC liegt.

Zieht man die den gegebenen Winkeln gegenüberliegende Diagonallinie AC: so kennt man die zwey Seiten AB, BC des Dreyeks ABC, und den eingeschlossenen Winkel ABC; mithin lassen sich die übrigen zwey Winkel BAC, ACB, und die dritte Seite AC nach §. 81. f. f. berechnen. Alsdenn hat man des Dreyeks ADC zwey Seiten AD, AC, und den der Seite AC gegenüberliegenden Winkel ADC. Folglich ist die Aufgabe wieder auf die §. 24. zurükgeführt;

und bestimmt oder unbestimmt, je nachdem das Dreyek ADC bestimmt ist, oder nicht, d. i. im Fall der Winkel ACD kein rechter wird, je nachdem AD $\lessgtr$ AC. Ebendiß folgt aus der geometrischen Construktion. Man verzeichne mit den gegebenen Stüken das Dreyek ABC: beschreibe über der Seite AC einen Kreisabschnitt CDA des gegebenen Winkels bey D fähig (III. 33.); und aus A mit einem Halbmesser gleich der dritten gegebenen Seite AD einen Kreis, welcher, wenn AD $>$ AC und das Viereck möglich ist, ersteren entweder in zwey Punkten D, d auf derselben Seite von AC (III, 7.) schneiden, oder ihn nur berühren wird. Zieht man die AD, Ad, CD, Cd: so ist das Dreyek ABC beyden Viereken ABCD, ABCd gemein, AD = Ad (Constr.) und ADC = AdC (III, 21.). Beyde Viereke passen also zu den Bedingungen der Aufgabe. Wenn der aus A mit dem Halbmesser AD beschriebene Kreis den CdDA nur berührt: so fallen die zwey Durchschnittspunkte D, d zusammen; $\left.\begin{matrix}AD\\Ad\end{matrix}\right\}$ wird ein Durchmesser des Kreises CdDA (III, 11.), und der Winkel ACD ein rechter (III, 31.). Ist aber AD $<$ AC: so fällt der eine Durchschnittspunkt in den grössern, der andere in den kleineren Kreisabschnitt (III. 7.); und es paßt nur eines der beyden Viereke zu den Bedingungen der Aufgabe, welche also in diesem Fall bestimmt ist.

Die vollständige Berechnung des Viereks wird am bequemsten durch Auflösung der Dreyeke ABC, ADC nach §. 81. ff. §. 24. f. geschehen. Wird aber die vierte Seite CD und der Inhalt des Viereks allein zu wissen verlangt: so ist aus §. 106.

$$CD = \frac{AD \cos.\ ADC}{\sin.\ tot.} \pm \sqrt{AC^2 - \left(\frac{AD \sin.\ ADC}{\sin.\ tot.}\right)^2}$$

aber $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \frac{\cos.\ ABC}{\sin.\ tot.}$ (§. 76.)

folglich $CD = \frac{AD \cos.\ ADC}{\sin.\ tot.} \pm$

$$\sqrt{AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \frac{\cos.\ ABC}{\sin.\ tot.} - \left(\frac{AD \sin.\ ADC}{\sin.\ tot.}\right)^2}$$

$$\text{Viereck } ABCD = \Delta ABC + \Delta ACD$$

$$= \frac{AB \times BC \sin. ABC}{2 \sin. tot.} + \frac{AD \times CD \sin. ADC}{2 \sin. tot.}$$

$$= \frac{AB \times BC \sin. ABC}{2 \sin. tot.} + \frac{AD_2 \sin. ADC \operatorname{Cosin.} ADC}{2 . \sin. tot.^2}$$

$$\pm \frac{AD \sin. ADC}{2 \sin. tot.} \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \frac{\operatorname{Cosin.} ABC}{\sin. tot.} - \left(\frac{AD \sin. ADC}{\sin. tot.}\right)^2}$$

Uebrigens giebt die nach obiger allgemeinen Formel angestellte Berechnung der vierten Seite CD selbst an, ob die Aufgabe bestimmt ist oder nicht. Sie wird nämlich nur alsdenn zwey positive Werthe für CD geben, wenn die Aufgabe unbestimmt; aber nur einen positiven Werth, wenn sie bestimmt ist. Wenn ADC spiz, $AD > AC$, und der Winkel ACD kein rechter ist; so ist

$$\frac{AD \sin. ADC}{\sin. tot.} < \frac{AD \sin. ADC}{\sin. ACD}$$

$$< AC$$

da ferner $AD > AC$

$$AD^2 > AC^2$$

oder (S. 43. Not.) $\frac{\operatorname{Cosin.} ADC^2 + \sin. ADC^2}{\sin. tot.^2} AD^2 > AC^2$

so ist $\frac{AD^2 \operatorname{Cosin.} ADC^2}{\sin. tot.^2} > AC^2 - \frac{AD^2 \sin. ADC^2}{\sin. tot.^2}$

mithin $\frac{AD \operatorname{Cosin.} ADC}{\sin. tot.} > \sqrt{AC^2 - \left(\frac{AD \sin. ADC}{\sin. tot.}\right)^2}$

und es giebt also in diesem Fall zwey positive Werthe von der vierten Seite CD.

Ist der Winkel ACD ein rechter, so ist die Aufgabe bestimmt, und ebendiß folgt aus dem allgemeinen Ausdruk für CD. Alsdenn ist nämlich $AC : AD = \sin. ADC : \sin. tot.$; folglich $AC = \frac{AD \sin. ADC}{\sin. tot.}$ und $AC^2 - \left(\frac{AD \sin. ADC}{\sin. tot.}\right)^2 = 0$. Demnach wird $CD = \frac{AD \operatorname{Cosin.} ADC}{\sin. tot.}$. Wenn $AD < AC$; so folgt wie vorhin $\frac{AD \operatorname{Cosin.} ADC}{\sin. tot.} < \sqrt{AC^2 - \left(\frac{AD \sin. ADC}{\sin. tot.}\right)^2}$, und es giebt nur einen positiven Werth von CD.

Im Fall der Winkel ADC ein rechter ist: hat man Cos. ADC = 0, sin. ADC = sin. tot. (§. 43.), mithin $CD = \pm\sqrt{AC^q - AD^q}$; folglich findet nur ein positiver Werth von CD Statt. Ist endlich der Winkel ADC stumpf; so wird das erste Glied negativ (§. 43.). In diesem Fall ist aber auch $AD < AC$, mithin $A\frac{D\,Cos.\,ADC}{sin.\,tot.} < \sqrt{AC^2 - \left(\frac{AD\,sin.\,ADC}{sin.\,tot.}\right)^2}$. Folglich erhält man nur einen positiven Werth von CD.

Beyspiel. *Fig.* 57.

DA =	805 Fuß.	ABC =	77° 10′
AB =	681	ADC =	55 20
BC =	459		179 60
AB - BC =	222		102 50
AB + BC =	1140	$\frac{ACB+BAC}{2}$ =	51 25 0
Lg. Tg. ½ Sume =	10,0980987;		
Lg. (AB - BC) =	2,3463530		
	12,4444517		
Lg. (AB + BC) =	3,0569049		
Lg. Tg. ½ Unts. =	9,3875468;	$\frac{ACB-BAC}{2}$ =	13 43 1,2
Lg. AB =	2,8331471	ACB =	65 8 1,2
Lg. BC =	2,6618127	BAC =	37 41 58,8
Lg. sin. ACB =	9,9577468		
Lg. sin. BAC =	9,7864124		
	2,8754003		
	2,8754003		
Lg. sin. ABC =	9,9890137		
Lg. AC =	2,8644140;	AC =	731,8363 F.

Lg. AD = 2,9294189
Lg. sin. ADC = 9,9151228
12,8445417
Lg. AC = 2,8644140
Lg. sin. {ACD / ACd} = 9,9801277;

Lg. AC = 2,8644140
Lg. sin. ADC = 9,9151228
2,9492912
Lg. sin. CAD = 9,8957466
Lg. sin. CAd = 9,4773169
Lg. CD = 2,8450378
Lg. Cd = 2,4266081
CD = 699,9028 F.
Cd = 267,0595

ACD = 72° 47' 56",6
179 59 60
ACd = 107 12 3,4
ADC = 55 20
123 7 56,6
162 32 3,4
179 59 60
CAD = 51 52 3,4
CAd = 17 27 56,6
BAC = 37 41 58,8
BAD = 89 34 2,2
BAd = 55 9 55,4
ACB = 65 8 1,2
ACD = 72 47 56,6
ACd = 107 12 3,4
BCD = 137 55 57,8
BCd = 172 20 4,6

Berechnung von CD nach der Formel §. 118.

Lg. AD = 2,9294189
Lg. Cosin. ADC = 9,7549604
Lg. sin. ADC = 9,9151228
2,6843793;
2,8445417
5,6890834;
Lg. AB = 2,8331471
Lg. BC = 2,6618127
Lg. Cosin. ABC = 9,3465794
Lg. 2 = 0,3010300
5,1425692;

$\frac{AD \text{ Cosin. } ADC}{\text{sin. tot.}} = 483,4809$ F.

$\left(\frac{AD \text{ sin. } ADC}{\text{sin. tot.}}\right)^2 = 488746,18$ Qf

$\frac{2AB.BC \text{ Cosin. } ABC}{\text{sin. tot.}} = \frac{138857,44}{627003,62}$ Qf

$AB^2 = 463761$
$BC^2 = 210681$
$AB^2 + BC^2 = 674442$
627603,62
46838,38

Lg. AB = 2,8331471
Lg. BC = 2,6618127
Lg. sin. ABC = 9,9890137
5,4839735
0,3010300
Lg. ΔABC = 5,1829435;

$\sqrt{46838,38} = 216,4218$ F.
$\frac{AD \text{ Cosin. } ADC}{\text{sin. tot.}} = 483,4809$
CD = 699,9027
Cd = 267,0591
ΔABC = 152385,4 Q. F.

Lg. AD = 2,9294189
Lg. CD = 2,8450378
Lg. sin. ADC = 9,9151228
5,6895795
0,3010300
Lg. ΔACD = 5,3885495;

ΔACD = 244652,4
Viereck ABCD = 397037,8 Q. F.

2) Beyspiel. *Fig.* 48.

DA = 417 Fuß.
AB = 914
BC = 518

ABC = 83° 0′ 0″
ADC = 105 16 25,9

Lg. AD = 2,6201361
Lg. Cos. ABC = 9,4206702
Lg. sin. ADC = 9,9843822
2,0408063;
2,6045183
5,2090366;

$\frac{AD \text{ Cosin. } ADC}{\text{sin. tot.}} = -109,85158$
$\left(\frac{AD \text{ sin. } ADC}{\text{sin. tot.}}\right)^2 = 161821,64$ Q. F.

Lg. AB = 2,9609462
Lg. BC = 2,7143298
Lg. Cos. ABC = 9,0858945
Lg. 2 = 0,3010300
5,0622005;

$\frac{2AB.BC \text{ Cos. } ABC}{\text{sin. tot.}} = 115398,59$
277420,23

$AB^q = 835396$
$BC^q = 208324$
1103720
$277220,23$
$826499,77$

$\sqrt{826499,77} = 909,1203$
$\frac{AD \text{ Cosin. } ADC}{\text{sin. tot.}} = -109,8515$
$CD = 799,2688$ Fuß.

§. 119.

In dem Vierek ABCD (*Fig.* 58—65) sind zwey aneinander liegende Seiten AB, BC, und die ihre Endpunkte zusammenhängende Diagonale AC (oder, statt dieser, der zwischen AB, BC begriffene Winkel, oder sonst drey den Triangel ABC bestimmende Stüke), nebst den Winkeln ADB, BDC gegeben, welche die andere Diagonale BD mit den zwey andern Seiten des Viereks macht: man soll diese, und die Diagonale BD, durch Verzeichnung und Berechnung angeben.

Es ist diß der Fall der Aufgabe der praktischen Geometrie: Aus den in D beobachteten scheinbaren Entfernungen drey der Lage nach gegebener Oerter, A, B, C die Lage des Orts D finden; wenn die drey Oerter A, B, C nicht in gerader Linie liegen (a).

Bestimmung.

Die Punkte B, D, können auf verschiedenen Seiten der gegebenen Diagonale AC liegen (*Fig.* 58.-61.); oder auf der nämlichen Seite derselben (*Fig.* 62-65.)

In dem zweyten Fall ist des Viereks innerer Winkel bey B (*Fig.* 62. 63.), oder bey D (*Fig.* 64. 65.), convex,

(a) Die folgende Construktionen und Berechnungsarten lassen sich leicht auf den Fall, als den einfachern, anwenden, wenn die drei Oerter A, B, C in gerader Linie liegen. S. Kästners geom. Abhandl. I. Samml. S. 384. ff. 394.

oder $> 2R$: um so mehr sind die Winkel $ABC + ADC$, d. h. $ABD + CBD + ADB + CDB > 2R$.

In dem ersten Fall müssen die Winkel $ABC + ADC$ nicht $= 2R$ seyn. Sonst hat man, statt fünf zur Bestimmung des Vierecks erforderlicher gegebenen Stüke, nur drey: indem sich ein Kreis um das Vierek beschreiben läßt (III, 22. Conv.); folglich (III, 21.) die Winkel $ADB = ACB$, $BDC = BAC$ werden (*Fig.* 66.). Der Triangel ABC wird also mehr als bestimmt; die Aufgabe aber ist unbestimmt. Jeder auf dem Bogen ADC des um das Dreyek ABC beschriebenen Kreises liegende Punkt thut nämlich den angegebenen Bedingungen Genüge; wenn anders diese, in so fern sie willkührlich angenommen, nicht an einem wirklichen Viereck richtig abgemessen wären, beysammen bestehen können.

Uebrigens kann in dem ersten Fall die Summe der Winkel $ABC + ADC$ größer seyn als zwey rechte Winkel (*Fig.* 58. 59.), oder kleiner (*Fig.* 60. 61.)

Der Fall (*Fig.* 64. 65.) unterscheidet sich von selbst durch die Größe der Summe der (Hyp.) gegebenen Winkel ADB, BDC von den übrigen Fällen.

Nicht so verhält es sich mit der Unterscheidung der zwey Fälle *Fig.* 58.—61. und *Fig.* 62. 63. wenn für dieselbe blos die zwey Seiten AB, BC, und die Diagonale AC, oder statt dieser der concave zwischen AB, BC begriffene Winkel, gegeben sind, ohne zu bemerken, ob dieser concave Winkel, oder seine Ergänzung zu vier rechten Winkeln, der innere Winkel des Vierecks ABCD sey; in so fern nämlich der aus den gegebenen drey Seiten AB, BC, AC berechnete, oder unmittelbar angegebene concave Winkel ABC größer ist als die Summe der Winkel ADB, BDC. Alsdenn reichen die angegebenen Stüke zur Entscheidung nicht aus, ob B und D auf verschiedenen Seiten, oder auf einerley Seite der Diagonale AC liegen. Diese von andern übersehene Bemerkung macht Herr Hofr. Kästner (Geom. Abhandl. Samml. I. S. 399. ff. 401. f.)

Construktion.

(*Fig.* 58. 60. 62. 64.) Aus den gegebenen Stüken verzeichne man den Triangel ABC. Auf seinen Seiten AB, BC beschreibe man auf derjenigen Seite derselben, wo der Punkt D, der Bestimmung der gegebenen Stüke, oder einer weitern unmittelbaren Angabe gemäß, liegen muß, Kreisabschnitte der gegebenen Winkel ADB, BDC fähig (III, 33.): welche, unter der Vorausſezung, daß ABC + ADC nicht = 2R, zu zwey verschiedenen Kreisen gehören; und auſſer dem Punkt B, worinn sie sich (Constr.) schneiden, noch in einem Punkt sich schneiden werden (III, 10.), welcher der vierte Winkelpunkt D des zu beschreibenden Vierecks seyn wird. (El. III, 21. Apollonius Ebene Oerter I, 4.) (b)

(b) Diese Construktion, und darauf gegründete Berechnung der Aufgabe finden sich in Willebrord Snellius Eratosthenes Batavus, de terræ ambitus vera quantitate (Lugd. Bat. 1614.), Lib. II. Cap. X. dessen Ueberschrift ist: Trium locorum intervallis inter se datis, quarti distantia ab omnibus unica statione definitur, & meridiani Leidensis positus. Hr. Hofr. Kästner (Geom. Abh. I. Samml. Vorr. S. 4. f.) fügt dieser Nachricht folgende, des Snellius Rechnungs-Verfahren betreffende, bey: „In dem Kreis über BA (Fig. 58.), in dessen Umfang D ist, ist der Winkel am Mittelpunkte noch einmal so groß als der gemessene BDA. Da nun auch die gerade Linie BA bekannt ist; so hat man dieses Kreises Mittelpunkt, Halbmesser, und Abstand des Mittelpunks von BA. Ebenso für den Kreis über CB, in welchem D auch ist: woraus sich dann weiter die gesuchten Entfernungen des Punkts D geben. Snellius zeigt die trigonometrische Rechnung an einem Exempel: und wendet dieses an, die Lage einer Stelle, wo man sich befindet, vermittelst des Grundrisses einer Stadt anzugeben."

Die nämliche Construktion hat, wie Hr. Camerer in dem zweyten Anhang seiner Uebersetzung der Ebenen Oerter von Apollonius (Leipzig 1796. S. 406.) bemerkt, Wilhelm Schickhard bey wirklichen Messungen angewendet, die er zur Berichtigung der Geographie von Wirtemberg anstellte; wie aus folgender Stelle eines (Tübingen, den 6. Jun. 1624.) an Joh. Kepler geschriebenen Briefs erhellet: Nunc chorographiam Wirtenbergicam aggredior, quam post Gadnerum habemus mendosissimam, nec nisi ex αυτοψια corrigibilem. Itaque lente absolvetur; sufficit, si

Oder (*Fig.* 59. 61. 63. 65.) man verzeichne wieder das Dreyek ABC: beschreibe auf seiner Seite AC, auf derselben

intra biennium vel triennium expedivero: quod citius factu est impossibile; præsertim mihi, qui per itinerum occasiones tantum hunc vel illum tractum describo. Plurimum negotii facessunt loca in convallibus sita, inobservabilia ex alto. Pro iis utor tali modo. Attendo, quos angulos faciant contiguos cum tribus jam notis locis A, B, C (Fig. 68.); eosque ad lineam mediam BG utcunque sumtam utrinque adjungo, velut F & E; mox per tria semper puncta A, B, F, vel B, E, C circulos duco; &, ubi ambo se secant, ut in H, locum quæsitum repono: quia angulos per totam circumferentiam omnes ad eandem chordam æquales esse docet Euclides. Examina hunc modum; &, si compendiosiorem nosti, non invide. (Epistolæ ad Jo. Kepplerum scriptæ — 1718. Epist. 466. p. 685. sq.)

Aehnliche Schwierigkeiten leiteten zu Ende des 17ten Jahrhunderts einen franzöſiſchen Geometer auf die Anwendung dieſer Conſtruktion; wie eine unter der Aufſchrift Probleme de geometrie pratique: trouver la position d'un lieu, que l'on ne peut voir des principaux points, d' où l'on observe; par M. Pothenot, in den Memoires de Math. & de phys. année 1692, tirés des registres de l'Acad. roy. des sc. (Amsterd. 1723. p. 276. sqq.) ſtehende Abhandlung bemerkt: Lorsque tous les lieux, que l'on doit mettre sur une carte, ont des marques sensibles, que l'on peut apperçevoir des principaux points, d'où l'on observe; il est aisé de determiner leur position par la methode ordinaire — Mais il y a quantité de lieux, qui n'ont point de marques sensibles, que l'on puisse apperçevoir de loin: par ex: les principaux contours des rivieres, des vallées & des forets; la jonction des ruisseaux & des vallons, leurs tetes; la situation des ponts; & les rencontres des grands chemins: & ainsi il est mal-aisé de determiner exactement la position des ces lieux — M. Pothenot s'est souvent trouvé dans cette difficulté, lorsqu'il a travaillé par l'ordre du roi à la carte des environs du nouveau canal de la riviere d'Eure: & voici une maniere certaine & aisée qu'il a trouvée, & dont il s'est servi pour determiner la position de ces points par des observations faites immediatement dans le lieu meme. Worauf die Verzeichnung, wie oben in dem Texte, angegeben wird; auch mit Beyfügung der dabey ſtatt findenden Einſchränkung, und der Regel zur Berechnung der Halbmeſſer der zwey Kreiſe.

Seite, wo D liegen soll, einen Kreisabschnitt, der des Winkels ADC = ADB + BDC, oder (wenn ADB + BDC > 2R, *Fig.* 65.) = der Ergänzung von ADB + BDC zu vier rechten Winkeln, fähig sey; und endige seinen Kreis, welcher unter der Voraussezung, daß ABC + ADC nicht = 2R, nicht durch B gehen wird. Von diesem Kreise schneide man durch die aus A gezogene Chorde AJ den Ausschnitt AHJ ab, des gegebenen Winkels ADB, oder in dem Fall *Fig.* 65. seiner Ergänzung zu zwey rechten, fähig; oder durch die aus C gezogenen Chorde CJ, einen Abschnitt ChJ des gegebenen Winkels BDC, oder (*Fig.* 65.) seiner Ergänzung zu zwey rechten Winkeln fähig (III, 34.). Alsdenn ziehe man durch J und B eine gerade Linie. Wo diese, oder ihre Verlängerung, den verzeichneten Kreis wieder schneidet, wird der gesuchte Punkt D liegen. (III, 21. Apoll. I, 2.) (c)

Die erste Construktion bestimmt den Punkt D durch den Durchschnitt zweyer Kreise; die zweyte durch den, eines Kreises und einer geraden Linie. Aus dieser läßt sich eine dritte herleiten, welche den Punkt D durch den Durchschnitt zweyer geraden Linien bestimmt. (d) Da hier der Hauptzwek Berechnung ist; für welche sie keine Folgerungen anbietet, die sich nicht aus der zweyten ziehen lassen: so übergehe ich sie; so wie auch die verschiedene vorgeschlagene mechanische Construktionen. (e)

(c) Lambert hat in seinen Anmerkungen und Zusätzen zur practischen Geometrie, §. 109. (Beyträge zum Gebrauche der Math. und deren Anwendung. I. Thl. Berlin 1765. S. 75. f.) diese zweyte Construktion der ersten beygefügt.

(d) Sie steht in Mezburgs Institutiones mathematicæ. Tom. III. (Viennæ 1777.) §. 135. sq. 139. sq. p. 99. sq. 103. sq.: auch bey F. C. Müller vom Gebrauch der Taschenuhren zu geom. Messungen — Nebst sehr vielen andern geometrisch-praktischen Vortheilen (Berlin und Leipzig 1777.) S. 177.

(e) Siehe L'art de lever les plans de tout ce qui a rapport à la guerre & à l'architecture civile & champetre; par M. Dupain de Montesson (Paris 1763.) p. 154. sq. 173. sq.; Lambert a. a. O. §. 110. S. 76. f.; Lamberts deutscher gelehrter Briefwechsel, III. B. (Berlin 1783.) S. 10.

Berechnung.

1. Ich werde, nach der von Hrn. Hofr. Käſtner a. a. O. S. 393. gebrauchten Bezeichnung, die Winkel, welche die gegebene, oder als gegeben geltende, Diagonale AC mit des Vierecks gegebenen Seiten AB, BC macht, BAC = A, BCA = C ſezen; unter ABC = B aber immer den inneren Winkel des Vierecks, oder die Summe der Winkel ABD + CBD verſtehen: ferner, dieſer Winkel, oder (*Fig.* 62. 63.) der Ergänzung des lezten zu vier rechten Winkeln, Gegenſeiten in dem Dreyek ABC, AB = c, BC = a, AC = b; und dieſer ihre Gegenwinkel, oder (*Fig.* 64. 65.) die Ergänzung des Gegenwinkels der lezten, in den Dreyeken ABD, BCD, ACD, nämlich die gegebenen Winkel ADB = γ, BDC = α, ADC d. h. ADB + BDC oder γ + α = β ſezen.

2.) Noch werde ich die Diameter der auf AB, BC, AC beſchriebenen, der Winkel γ, α, β oder (*Fig.* 65.) 4R - β, fähigen Kreisabſchnitte durch C, A, B. bezeichnen.

Da (*Fig.* 67.) der Diameter KP jedes auf einer geraden Linie KO beſchriebenen, des ſchiefen Winkels P oder S fähigen Kreisabſchnitts, wegen des rechten Winkels KOP (III, 31.), und weil P + S = 2R (III, 22.), alſo sin. S = sin. P iſt, ſich zu KO verhält, wie der sin. tot.: sin. P oder sin. S; das eines rechten Winkels fähige Segment aber ein Halbzirkel, alſo ſein Diameter = KO iſt: ſo ſind $C = \frac{c \sin.tot.}{\sin.\gamma}$, $A = \frac{a \sin.tot.}{\sin.\alpha}$, $B = \frac{b \sin.tot.}{\sin.\beta}$; nur wird für den Fall *Fig.* 65. $B = \frac{b \sin.tot.}{\sin.(4R-\beta)} = \frac{b \sin.tot.}{\sin.(\beta-2R)} = -\frac{b \sin.tot.}{\sin.\beta}$ (§. 113.)

3.) Sind (*Fig.* 58. 60. 62. 64.) E, F die Mittelpunkte der auf AB, BC beſchriebenen, der gegebenen Winkel ADB,

12. f. 16. f. 19. f.; Müller a. a. O. S. 165. ff. 171. f.; Claſen Beyträge zur Aufmeſſung militäriſcher Situationsplane, in Böhms Magazin für Ingenieur und Artilleriſten, VI. B. (Gieſſen 1780.) S. 67. ff.; P. Sinners Abhdlg. über die prakt. geom. Aufg.: Aus zween an einem einzigen Standorte aufgenommenen Winkeln die Entfernungen des Standortes von einem jeden Ecke eines bekannten Dreyeks zu finden (Ottobeuren 1791.) S. 15. ff.

BDC fähigen Kreisabschnitte; und werden die gerade Linien EB, ED, FB, FD, EF gezogen: so halbirt EF und ihre Verlängerung sowohl die concaven und convexen Winkel BED, BFD (I, 8. 13.), als die gemeinschaftliche Chorde BD beyder Cirkel, und fällt auf diese senkrecht in L (I, 4.)

4.) Versteht man unter den Winkeln BED, BFD die concave oder convexe, welche auf eben den Bogen BMD, BND, wie die Winkel an den Peripherien BAD, BCD stehen: so sind jene die doppelten von diesen (III, 20.); ihre Hälften BEM, BFN sind also diesen gleich.

5.) Unter der auf die Winkel ABC, ADC sich beziehenden Voraussezung (1.) sind die Winkel BAD+BCD immer $= 4R-(ABC+ADC) = 4R-(B+\beta)$. (I, 32. Zus.)

6.) Die Winkel BAD+BCD sind also $< 2R$; und wenigstens einer derselben BCD ist $< R$, mithin in einem Segment $>$ Halbzirkel (III, 31. Conv.); so daß F, C auf einerley Seite von BD liegen, und der Winkel BCD $=$ BFL ist (4.): wenn die Winkel ABC+ADC oder $B+\beta > 2R$ sind (*Fig.* 58, 62. 64.)

Nun kann aber E nicht auf die Verlängerung von LF über F hinausfallen, wie in *Fig.* 60: weil sonst BFL $>$ BEL (I, 16.); daher BEM+BFL, mithin (4.) BAD+BCD $>$ BEM+BEL: d. i. (I, 13.) $> 2R$ seyn würde. E fällt also auf FL, oder auf ihre Verlängerung jenseits L: und die Winkel BAD, BCD sind alsdenn gleich BEF, BFE.

7.) Sind hingegen die Winkel ABC+ADC oder $B+\beta < 2R$ (*Fig.* 60.); mithin BAD+BCD $> 2R$: so ist wenigstens einer von beyden BAD $> R$, also in einem Abschnitt $>$ Halbkreis (III, 31. Conv.); E und A liegen daher auf verschiedenen Seiten von BD; und der Winkel BAD $=$ BEM (4.) ist $= 2R-BEL$.

Und nun kann der Mittelpunkt des auf BC beschriebenen, des Winkels BDC fähigen Abschnitts nicht auf die Verlängerung von EL, über E hinaus, wie in F fallen:

weil sonst BEM+BF'N, mithin (4.) BAD+BCD= BEF'+BF'E, also (1, 17.)<2R seyn würden. Der Mittelpunkt F dieses zweyten Kreisabschnitts liegt mithin auf EL, oder auf ihrer Verlängerung jenseits L. Daher ist sowohl der Winkel BAD=BEM=2R-BEF; als der Winkel BCD=BFN=2R-BFE.

8.) In dem ersten Fall (6.) ist der Winkel EBF=2R-(BEF+BFE) (1, 32.)=2R-(BAD+BCD). Folglich da immer BAD+BCD+ABC+ADC=4R (5.); also nun ABC+ADC-2R=2R-(BAD+BCD): so ist in diesem Fall EBF=ABC+ADC-2R=B+β-2R.

9.) In dem zweyten Fall (7.) sind die Winkel BAD+BCD +BEF+BFE=4R=BAD+BCD+ABC+ADC; also BEF+BFE=ABC+ADC: und der Winkel EBF =2R-(BEF+BFE)=2R-(ABC+ADC)=2R-(B+β).

10.) In den Dreyeken EFB (*Fig.* 58. 60. 62. 64.) sind nun, ausser dem Winkel EBF (8. f.), die Seiten $EB=\frac{1}{2}\mathfrak{C}=\frac{c\,\sin.tot.}{2\,\sin.\gamma}$, $FB=\frac{1}{2}\mathfrak{A}=\frac{a\,\sin.tot.}{2\,\sin.\alpha}$ (2.), durch die (Hyp.) gegebenen Stüke bekannt. Daraus lassen sich die Winkel BEF, BFE; und aus diesen nach 6. f. die Winkel BAD, BCD folgern. Alsdenn kennt man in jedem der Dreyeke ABC, BCD eine Seite und zwey Winkel; woraus die gesuchten DA, DB, DC sich berechnen lassen (§. 18.).

Diese Bemerkung macht Herr Camerer a. a. O. S. 405. f. für den Fall *Fig.* 58. 62. 64.

11.) Oder man folgert, mittelst eines der zwey Winkel BEF, BFE, in einem der zwey bey L rechtwinklichten Dreyeke BEL, BFL, die Seite BL; und daraus DB= 2BL (3.). So hat man in den Dreyeken ABD, BCD zwey Seiten, und den der einen gegenüberliegenden Winkel; um DA, DC zu berechnen (§. 24.).

Dies ist Lamberts erstes trigonometrisches Verfahren (Beyträge zum Gebr. d. Math. I. B. S. 74. f.) (f)

(f) P. Sinner, der a. a. O. §. 37. ff. S. 39. ff. die nämliche Berechnungsart vorträgt, bemerkt in der Vorrede (S. 2.):

Vergl. Langsdorfs Erläuterung der Kästner. Anal. endlicher Größen. S. 438. f. Dupain de Montesson Art de lever les plans. p. 40. sqq.

12.) Zur Berechnung der Winkel BEF, BFE, und folglich der Winkel BAD, BCD lassen sich alle die verschiedenen Methoden anwenden, mittelst welcher in einem Drehek, dessen zwey Seiten und der Winkel dazwischen gegeben sind, die übrigen zwey Winkel gefunden werden.

13.) EB größer als FB angenommen, ist (§. 81.)

$$EB+FB : EB-FB = Tg.\frac{BFE+BEF}{2} : Tg.\frac{BFE-BEF}{2}$$

$$\text{oder } Tg.\left(\frac{BFE+BEF}{2} - BEF\right)$$

14.) Da $EB : FB = \frac{c}{\sin.\gamma} : \frac{a}{\sin.\alpha}$ (10.)

$$= c \sin.\alpha : a \sin.\gamma :$$

so ist $EB+FB : EB-FB = c\sin.\alpha + a\sin.\gamma : c\sin.\alpha - a\sin.\gamma$.

„Schon im vorigen Jahrhunderte war der Kunstgriff bekannt," aus drey im Felde gegebenen Punkten die Lage des vierten" zu finden. Hr. Trew in seiner praktischen Geometrie (da" ich das Werk nicht mehr beyhanden habe, kann ich die Jahr-" zahl aus dem vorigen Jahrhunderte nicht anführen) berich-" tet, daß ein anderer Feldmesser sich dieses Vortheils in" seinen praktischen Vermessungen schon bedient habe. Er" mag wohl der erste gewesen seyn, der eine trigonometrische" Auflösung hierüber angegeben hat; die im Grunde von der" meinigen §. 31. — 41. nicht verschieden ist." In Cornelii a Bengham Bibliographia mathematica (Amst. 1688.) finde ich (p. 140.) Abdias Trew Summa geometriæ practicæ. Norimb. 1663; und (p. 373.) desselben leichter Bericht vom Feldmessen, mit dessen beygefügten Anmerkungen, wie sie im Krieg und Frieden zu Land und Wasser, nützlich sind. Nürnb. 1663. angeführt. Beyde sind aber nur ein Werk; wie aus der Beschreibung der zweyten Ausgabe desselben in Kästners Gesch. d. Math. III. B. S. 302. ff. erhellet, deren Titel lautet: Summa geometriæ practicæ, worin erstlich Bernhard Canzlers kurzer und leichter Bericht vom Feldmessen — zum zweyten unterschiedliche in Friedens und Kriegszeiten, zu Land und Wasser nützliche Annotationes ... durch M. Abdiam Trew Math. & phys. P. Altdorf. zum dritten ein neuer Anhang enthalten, in welchem das Feldmessen nach den heutzutag richtigsten Manieren kürzlich vorgestellt wird, von Joh. Gabriel Doppelmayr Matth. P. P. Nürnb. 1718.

15.) Wenn die Winkel $ABC+ADC$ oder $B+\beta > 2R$ sind (*Fig.* 58. 62. 64.); so sind die Winkel $BFE = BCD$, $BEF = BAD$ (6.), $BEF+BFE = BCD+BAD = 4R-(B+\beta)$ (5.) folglich

$$c\sin.\alpha + a\sin.\gamma : c\sin.\alpha - a\sin.\gamma = \text{Tg.}\frac{4R-(B+\beta)}{2} : \text{Tg.}\frac{BCD-BAD}{2} \text{ oder } \text{Tg.}\left(\frac{4R-(B+\beta)}{2} - BAD\right).$$

16.) Sind aber die Winkel $ABC+ADC$ oder $B+\beta < 2R$ (*Fig.* 60.): so sind die Winkel $BFE+BEF = ABC+ADC = B+\beta$ (9.), $BFE = 2R-BCD$, $BEF = 2R-BAD$ (7.); und daher $BFE-BEF = BAD-BCD$. Mithin

$$c\sin.\alpha + a\sin.\gamma : c\sin.\alpha - a\sin.\gamma = \text{Tg.}\frac{B+\beta}{2} : \text{Tg.}\frac{BAD-BCD}{2}$$

$$\text{oder } : \text{Tg.}\left(\frac{B+\beta}{2} - (2R-BAD)\right)$$

$$\text{oder } \text{Tg.}\left(BAD - \frac{4R-(B+\beta)}{2}\right).$$

17.) Der Winkel $\frac{4R-(B+\beta)}{2}$ ist positiv und spizig, also seine Tangente positiv; wenn $B+\beta > 2R$: da immer $B+\beta < 4R$ (5.). Ist hingegen $B+\beta < 2R$: so ist $\frac{B+\beta}{2}$ spizig; und seine Tangente positiv.

Unter der ferneren Voraussezung, daß $EB > FB$ (13.), d. h. $\frac{c}{\sin.\gamma} > \frac{a}{\sin.\alpha}$ (10.), $c\sin.\alpha > a\sin.\gamma$: sind mithin

$$\text{Tg.}\frac{BCD-BAD}{2} = \text{Tg.}\left(\frac{4R-(B+\beta)}{2} - BAD\right) \text{ (15.)}$$

und $\text{Tg.}\frac{BAD-BCD}{2} = \text{Tg.}\left(BAD - \frac{4R-(B+\beta)}{2}\right)$ (16.)

positiv; der Folge jener Bedingungen und I. 18. gemäß: daß $\frac{BFE-BEF}{2}$ in beyden Fällen, mithin in jenem $\frac{BCD-BAD}{2} = \frac{4R-(B+\beta)}{2} - BAD$, in diesem $\frac{BAD-BCD}{2} = BAD - \frac{4R-(B+\beta)}{2}$ positive spize Winkel sind.

Die Proportion (15.) mit der Form Tg. $\left(\frac{4R-(B+\beta)}{2} - BAD\right)$ des vierten Glieds ist Lamberts zweyte trigonometrische Auflösung a. a. O. S. 73.

Die Proportion (16.), mit der Form Tg. $\frac{BAD-BCD}{2}$ des vierten Glieds, giebt für dieses den Kästnerischen Ausdruk bey Langsdorf a. a. O. S. 436.

Auf eben diese Proportion, mit der Form Tg. $\left(BAD-\frac{4R-(B+\beta)}{2}\right)$ reducirt sich Schulzes erste Auflösung in dem Taschenbuch für diejenigen, so gründliche Anwendung der Meßkunst zu machen sich vorsezen. II. Heft. Berlin 1783. S. 450.

18.) Da gewöhnlich nicht EB, FB selbst, sondern ihre Logarithmen unmittelbar bestimmt werden: so nimmt man zu Erleichterung der Proportion (13.) einen Hülfswinkel Δ an, der so beschaffen ist, daß (EB > FB gesezt, wie in 13.)

$$FB : EB : \text{sin. tot.} : \text{Tg.}\,\Delta$$

woraus folgt (§. 84.)

$$\text{sin. tot.} : \text{Tg.}\,(\Delta - 45°) = \text{Tg.}\,\frac{BFE+BEF}{2} : \text{Tg.}\,\frac{BFE-BEF}{2}$$

$$\text{oder} \quad : \text{Tg.}\left(\frac{BFE+BEF}{2} - BEF\right)$$

19.) Nach 14. hat man also $\text{Tg.}\,\Delta = \frac{c \sin.\alpha \text{ sin. tot.}}{a \sin.\gamma}$: und

alsdenn $\text{Tg.}\,\frac{BCD-BAD}{2}$

oder $\text{Tg.}\left(\frac{4R-(B+\beta)}{2} - BAD\right)$

$$= \frac{\text{Tg.}\,(\Delta-45°)\,\text{Tg.}\,\frac{4R-(B+\beta)}{2}}{\text{sin. tot.}} \quad \text{nach 15.}$$

$\text{Tg.}\,\frac{BAD-BCD}{2}$

oder $\text{Tg.}\left(BAD-\frac{4R-(B+\beta)}{2}\right)$

$$= \frac{\text{Tg.}\,(\Delta-45°)\,\text{Tg.}\,\frac{B+\beta}{2}}{\text{sin. tot.}} \quad \text{nach 16.}$$

Diese Auflösungen sind der Käſtneriſchen (Geom. Abh. I. Samml. S. 395.), und der zweyten Schulziſchen a. a. O. ähnlich.

20.) Für die Winkel BEF, BFE ſelbſt hat man nach §. 90. 97.

$$\text{Cotg. BEF} = \frac{EB}{FB}\,\text{Cosec. EBF} - \text{Cotg. EBF};$$

$$\text{Cotg. BFE} = \frac{FB}{EB}\,\text{Cosec. EBF} - \text{Cotg. EBF}:$$

mithin (13.)

$$\text{Cotg. BEF} = \frac{c \sin.\alpha}{a \sin.\gamma}\,\text{Cosec. EBF} - \text{Cotg. EBF};$$

$$\text{Cotg. BFE} = \frac{a \sin.\gamma}{c \sin.\alpha}\,\text{Cosec. EBF} - \text{Cotg. EBF}.$$

21.) Wenn die Winkel ABC+ADC oder $B+\beta > 2R$: ſo ſind BAD = BEF, BCD = BFE nach 6; EBF = $B+\beta-2R$ nach 8: folglich

$$\text{Cotg. BAD} = \frac{c \sin.\alpha}{a \sin.\gamma}\,\text{Cosec.}(B+\beta-2R) - \text{Cotg.}(B+\beta-2R)$$

$$\text{Cotg. BCD} = \frac{a \sin.\gamma}{c \sin.\alpha}\,\text{Cosec.}(B+\beta-2R) - \text{Cotg.}(B+\beta-2R)$$

22.) Für ABD+ADC oder $B+\beta < 2R$, ſind BAD = $2R-BEF$, BCD = $2R-BFE$ nach 7; EBF = $2R-(B+\beta)$ nach 9: daher

$$\text{Cotg.}(2R-\text{BAD}) = \frac{c \sin.\alpha}{a \sin.\gamma}\,\text{Cosec.}(2R-(B+\beta)) - \text{Cotg.}(2R-(B+\beta));$$

$$\text{Cotg.}(2R-\text{BCD}) = \frac{a \sin.\gamma}{c \sin.\alpha}\,\text{Cosec.}(2R-(B+\beta)) - \text{Cotg.}(2R-(B+\beta)).$$

23.) Durch die Bemerkungen §. 94. und durch ähnliche über die Cotangenten und Coſecanten convexer Winkel, wie in §. 113. 115. über die Sinus und Coſinus derſelben, verwandeln ſich die Formeln 21 und 22 in folgende allgemeine:

$$\text{Cotg. BAD} = -\frac{c \sin.\alpha}{a \sin.\gamma} \text{Cosec.}(B+\beta) - \text{Cotg.}(B+\beta);$$

$$\text{Cotg. BCD} = -\frac{a \sin.\gamma}{c \sin.\alpha} \text{Cosec.}(B+\beta) - \text{Cotg.}(B+\beta).$$

Aehnliche Ausdrüke der Cotangenten oder Tangenten der Winkel BAD, BCD finden sich bey Camerer a. a. O. S. 405. Schulze a. a. O. 451. Langsdorf a. a. O. S. 434. f., in Mayers Unterricht zur prakt. Geom. II. Th. S. 269, in Vegas Vorlesungen über die Mathematik II. B. S. 269, in Biörnsens Introd. in Tetragonom p. 281.; und bey P. Sinner a. a. O. S. 46. ff.

24.) In den Dreyeken EFB ist die dritte Seite

$$EF = \sqrt{EB^2 + FB^2 - 2EB \times FB \frac{\text{Cosin. EBF}}{\text{sin. tot.}}} \quad (\S. 76.),$$

für den, wie gewöhnlich, zum Grunde liegenden Fall, wenn EBF ein spizer Winkel ist.

25.) Hieraus lassen sich die Sinus der Winkel BEF, BFE, welche zugleich die Sinus der Winkel BAD, BCD sind (6. f.); und, mittelst dieser, die Diagonale BD des Vierecks ABCD, vermöge der Proportionalität der Seiten der Triangel und der Sinus ihrer Gegenwinkel folgern.

Die Bestimmung von BD läßt sich aber kürzer, mittelst der Bemerkung 3. 11, unmittelbar auf EF zurükführen.

26.) Nämlich $\left.\begin{matrix} LB : EB \\ \text{folglich auch } DB : 2EB \end{matrix}\right\} = \text{sin. BEF} : \text{sin. tot.}$

und hieraus $DB : 2EB \frac{\text{sin. EBF}}{\text{sin. tot.}} = \text{sin. BEF} : \text{sin. EBF}$

$$= FB : EF$$

$$= 2FB : 2EF$$

$$= 2FB : \sqrt{4EB^2 + 4FB^2 - 8EB \times FB \frac{\text{Cosin. EBF}}{\text{sin. tot.}}} \quad (24.)$$

also nach 2.

$$DB : \mathfrak{C} \frac{\text{sin. EBF}}{\text{sin. tot.}} = \mathfrak{A} : \sqrt{\mathfrak{C}^2 + \mathfrak{A}^2 - 2\mathfrak{A}\mathfrak{C} \cdot \frac{\text{Cosin. EBF}}{\text{sin. tot.}}}$$

mithin ist

$$DB = \frac{\mathfrak{AC}\,\frac{\text{sin. EBF}}{\text{sin. tot.}}}{\sqrt{\mathfrak{C}^2 + \mathfrak{A}^2 - 2\mathfrak{AC}\cdot\frac{\text{Cosin. EBF}}{\text{sin. tot.}}}}$$

$$= \frac{\mathfrak{AC}\,\frac{\text{sin. }(B+\beta-2R)}{\text{sin. tot.}}}{\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{C}^2 - 2\mathfrak{AC}\,\frac{\text{Cosin. }(B+\beta-2R)}{\text{sin. tot.}}}} \quad \text{wenn } B+\beta > 2R \text{ nach 8.}$$

$$= \frac{\mathfrak{AC}\,\text{sin. }\frac{(2R-(B+\beta))}{\text{sin. tot.}}}{\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{C}^2 - 2\mathfrak{AC}\,\frac{\text{Cosin. }(2R-(B+\beta))}{\text{sin. tot.}}}} \quad \text{wenn } B+\beta < 2R \text{ nach 9.}$$

Statt $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$ ihre Werthe (2) gesezt, erhält man Björnsens Ausdruk von DB a. a. O. p. 77. seiner Voraussezung §. 101. p. 73. gemäß.

27.) Wird in dem Fall *Fig.* 62. der concave Winkel ABC, oder des Dreyeks BAC innerer Winkel ABC = B' gesezt: so sind $B = 4R - B'$; $EBF = B + \beta - 2R$ (8.) $= 2R - (B' - \beta)$; und

$$DB = \frac{\mathfrak{AC}\,\frac{\text{sin. }(2R-(B'-\beta))}{\text{sin. tot.}}}{\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{C}^2 - 2\mathfrak{AC}\,\frac{\text{Cosin. }(2R-(B'-\beta))}{\text{sin. tot.}}}}$$

$$= \frac{\mathfrak{AC}\,\frac{\text{sin. }(B'-\beta)}{\text{sin. tot.}}}{\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{C}^2 + 2\mathfrak{AC}\,\frac{\text{Cosin. }(B'-\beta)}{\text{sin. tot.}}}}$$

28.) Die zweyte Construktion (§. 119. *Fig.* 59. 61. 63. 65.) gibt folgende Anleitungen zur Berechnung, und besonders zur unmittelbaren allgemeinen Bestimmung von DA, DC.

Da die Winkel

$AJC = 2R - ADC$ (III, 22.) $= 2R - \beta$ (*Fig.* 59. 61. 63.)
$= 2R - (4R - \beta) = \beta - 2R$ (*Fig.* 65.)

$CAJ = CDJ$ (III, 21.) $= \alpha$ (*Fig.* 59. 61. 63.)
$= 2R - BDC = 2R - \alpha$ (*Fig.* 65.)
$ACJ = ADJ = \gamma$ (*Fig.* 59. 61. 63.)
$= 2R - ADB = 2R - \gamma$ (*Fig.* 65.)

so sind in den Dreyeken ACJ, ausser der Seite AC, die Winkel; und mithin auch die Seiten AJ, CJ gegeben.

Nämlich $\sin. AJC : \left\{\begin{matrix}\sin. ACJ \\ \sin. CAJ\end{matrix}\right\} = AC : \left\{\begin{matrix}AJ \\ CJ\end{matrix}\right.$

also (*Fig.* 59. 61. 63.) $\sin.(2R-\beta) : \left\{\begin{matrix}\sin. \gamma \\ \sin. \alpha\end{matrix}\right\} = b : \left\{\begin{matrix}AJ \\ CJ\end{matrix}\right.$

daher

$$AJ = \frac{b \sin. \gamma}{\sin.(2R-\beta)} = \frac{b \sin. \gamma}{\sin. \beta}; \quad CJ = \frac{b \sin. \alpha}{\sin.(2R-\beta)} = \frac{b \sin. \alpha}{\sin. \beta}$$

und (*Fig.* 65.) $\sin.(\beta - 2R) : \left\{\begin{matrix}\sin.(2R-\gamma) \\ \sin.(2R-\alpha)\end{matrix}\right\} = b : \left\{\begin{matrix}AJ \\ CJ\end{matrix}\right.$

also $AJ = \frac{b \sin.(2R-\gamma)}{\sin.(\beta-2R)} = -\frac{b \sin. \gamma}{\sin. \beta}$

$$CJ = \frac{b \sin.(2R-\alpha)}{\sin.(\beta-2R)} = -\frac{b \sin. \alpha}{\sin. \beta}$$

in beyden Fällen aber, zufolge 2.

$$AJ = \mathfrak{B} \frac{\sin. \gamma}{\sin. tot.}; \quad CJ = \mathfrak{B} \frac{\sin. \alpha}{\sin. tot.}$$

29.) Ferner sind die Winkel

$BAJ = CAJ - CAB = \alpha - A$ (*Fig.* 59.)
$= CAB - CAJ = A - \alpha$ (*Fig.* 61.)
$= CAJ + CAB = \alpha + A$ (*Fig.* 63.)
$= 2R - \alpha + A = 2R - (\alpha - A)$ (*Fig.* 65.)

$BCJ = ACJ - ACB = \gamma - C$ (*Fig.* 59.)
$= ACB - ACJ = C - \gamma$ (*Fig.* 61.)
$= ACJ + ACB = \gamma + C$ (*Fig.* 63.)
$= 2R - \gamma + C = 2R - (\gamma - C)$ (*Fig.* 65.)

30.) Man kennt also (28. u. f.) in den Dreyeken BAJ, BCJ zwey Seiten und die Winkel dazwischen.

Berechnet man nun in diesen die Winkel ABJ, CBJ: so sind die Winkel

$ABD = ABJ$ (*Fig.* 61. 65.) $= 2R - ABJ$ (*Fig.* 59. 63.)

$CBD = CBJ \qquad = 2R - CBJ$

und man kennt in den Triangeln ABD, BDC eine Seite und zwey Winkel; woraus DA, DB, DC sich folgern lassen.

31.) Oder werden in den Triangeln BAJ, BCJ die Winkel AJB, CJB berechnet: so sind die Winkel

$CAD = CJD$
$ACD = AJD$ (III, 21.) $= CJB$ *Fig.* 59. $= 2R - CJB$
$= AJB$ 63. 65. $= 2R - AJD$ *Fig.* 61.

und man hat in den Dreyeken ACD eine Seite und die Winkel, um daraus DA, DC zu berechnen: wozu auch die Triangel ADJ, CDJ gebraucht werden können.

32.) Da übrigens die Winkel ABC, und AJC (28.) bekannt sind; so ist die Berechnung des einen von den zwey Winkeln ABJ, CBJ (30.), oder AJB, CJB (31.) zu dem Zwek hinreichend.

33.) Von den Berechnungsarten (30. ff.) lehren die eine, oder die andere, Müller a. a. O. S. 170. 176. 178.; Metzburg a. a. O. p. 100. sqq. Unterberger (Anfangsgründe der Math. II. B. S. 99. 101. f.)

34.) $AJ > AB$, $CJ > CB$ angenommen; sind (§. 81. ff.)

$$AJ + AB : AJ - AB = Tg.\frac{ABJ + AJB}{2} : Tg.\frac{ABJ - AJB}{2}$$

$$CJ + CB : CJ - CB = Tg.\frac{CBJ + CJB}{2} : Tg.\frac{CBJ - CJB}{2}$$

35. Nach 28. ist allgemein

$$AJ + AB : AJ - AB = \mathfrak{B}\frac{\sin.\gamma}{\sin.tot.} + c : \mathfrak{B}\frac{\sin.\gamma}{\sin.tot.} - c$$

$$CJ + CB : CJ - CB = \mathfrak{B}\frac{\sin.\alpha}{\sin.tot.} + a : \mathfrak{B}\frac{\sin.\alpha}{\sin.tot.} - a$$

folglich

$$\mathfrak{B}\frac{\sin.\gamma}{\sin.tot.}+c:\mathfrak{B}\frac{\sin.\gamma}{\sin.tot.}-c=Tg.\frac{ABJ+AJB}{2}:Tg.\frac{ABJ-AJB}{2}$$

$$\mathfrak{B}\frac{\sin.\alpha}{\sin.tot.}+a:\mathfrak{B}\frac{\sin.\alpha}{\sin.tot.}-a=Tg.\frac{CBJ+CJB}{2}:Tg.\frac{CBJ-CJB}{2}$$

36. Macht man

$$\left.\begin{matrix}AB:AJ\\ c:\mathfrak{B}\frac{\sin.\gamma}{\sin.tot.}\end{matrix}\right\}=\sin.tot.:Tg.\Lambda$$

$$\left.\begin{matrix}CB:CJ\\ a:\mathfrak{B}\frac{\sin.\alpha}{\sin.tot.}\end{matrix}\right\}=\sin.tot.:Tg.\Omega;$$

also $Tg.\Lambda=\frac{\mathfrak{B}}{c}\sin.\gamma$, $Tg.\Omega=\frac{\mathfrak{B}}{a}\sin.\alpha$:

so hat man (§. 84.)

$$\sin.tot.:Tg.(A-45°)=Tg.\frac{ABJ+AJB}{2}:Tg.\frac{ABJ-AJB}{2}$$

$$\sin.tot.:Tg.(\Omega-45°)=Tg.\frac{CBJ+CJB}{2}:Tg.\frac{CBJ-CJB}{2}$$

37. Zufolge 29. aber sind die Winkel

$ABJ+AJB=2R-(\alpha-A)$, $CBJ+CJB=2R-(\gamma-C)$ *Fig.* 59.

$=2R-(A-\alpha)$ $=2R-(C-\gamma)$ *Fig.* 61.

$=2R-(\alpha+A)$ $=2R-(\gamma+C)$ *Fig.* 63.

$=\alpha-A$ $=\gamma-C$ *Fig.* 65.

welche verschiedene Fälle sich theils nach den Angaben der Bestimmung S. 173. f., theils durch die relative Größe der Winkel α und A, γ und C unterscheiden.

38.) Für die Winkel ABJ, AJB, CBJ, CJB selbst hat man (§. 90. 97.)

$$Cotg.ABJ=\frac{AB}{AJ}Cosec.BAJ-Cotg.BAJ$$

$$=\frac{c}{\mathfrak{B}}\times\frac{\sin.tot.}{\sin.\gamma}Cosec.BAJ-Cotg.BAJ$$

$$\text{Cotg. AJB} = \frac{AJ}{AB}\,\text{Cosec. BAJ} - \text{Cotg. BAJ}$$
$$= \frac{\mathfrak{B}}{c} \times \frac{\sin.\gamma}{\sin.\text{tot.}}\,\text{Cosec. BAJ} - \text{Cotg. BAJ}$$
$$\text{Cotg. CBJ} = \frac{CB}{CJ}\,\text{Cosec. BCJ} - \text{Cotg. BCJ}$$
$$= \frac{a}{\mathfrak{B}} \times \frac{\sin.\text{tot.}}{\sin.\alpha}\,\text{Cosec. BCJ} - \text{Cotg. BCJ}$$
$$\text{Cotg. CJB} = \frac{CJ}{CB}\,\text{Cosec. BCJ} - \text{Cotg. BCJ}$$
$$= \frac{\mathfrak{B}}{a} \times \frac{\sin.\alpha}{\sin.\text{tot.}}\,\text{Cosec. BCJ} - \text{Cotg. BCJ}$$

39.) Zufolge 30. 31. und §. 94. ſind

$$\left.\begin{array}{l}\text{Cotg. ABD} = -\text{Cotg. ABJ}\\ \text{Cotg. CBD} = -\text{Cotg. CBJ}\end{array}\right\}\text{in } \textit{Fig.}\ 59.\ 63.$$
$$\left.\begin{array}{l}\text{Cotg. ABD} = +\text{Cotg. ABJ}\\ \text{Cotg. CBD} = +\text{Cotg. CBJ}\end{array}\right\}\text{in } \textit{Fig.}\ 61.\ 65.$$
$$\left.\begin{array}{l}\text{Cotg. CAD} = +\text{Cotg. CJB}\\ \text{Cotg. ACD} = +\text{Cotg. AJB}\end{array}\right\}\text{in } \textit{Fig.}\ 59.\ 63.\ 65.$$
$$\left.\begin{array}{l}\text{Cotg. CAD} = -\text{Cotg. CJB}\\ \text{Cotg. ACD} = -\text{Cotg. AJB}\end{array}\right\}\text{in } \textit{Fig.}\ 61.$$

40.) So ergeben ſich (39. und 2.)

$$\text{Cotg. ABD} = -\frac{c}{\mathfrak{B}} \times \frac{\sin.\text{tot.}}{\sin.\gamma}\,\text{Cosec.}(\alpha - A) + \text{Cotg.}(\alpha - A)$$
$$= -\frac{c\sin.\beta}{b\sin.\gamma}\,\text{Cosec.}(\alpha - A) + \text{Cotg.}(\alpha - A)\ \text{in } \textit{Fig.}\ 59.$$
$$= +\frac{c}{\mathfrak{B}} \times \frac{\sin.\text{tot.}}{\sin.\gamma}\,\text{Cosec.}(A - \alpha) - \text{Cotg.}(A - \alpha)$$
$$= +\frac{c\sin.\beta}{b\sin.\gamma}\,\text{Cosec.}(A - \alpha) - \text{Cotg.}(A - \alpha)\ \text{in } \textit{Fig.}\ 61.$$
$$= -\frac{c}{\mathfrak{B}} \times \frac{\sin.\text{tot.}}{\sin.\gamma}\,\text{Cosec.}(\alpha + A) + \text{Cotg.}(\alpha + A)$$
$$= -\frac{c\sin.\beta}{b\sin.\gamma}\,\text{Cosec.}(\alpha + A) + \text{Cotg.}(\alpha + A)\ \text{in } \textit{Fig.}\ 63.$$
$$= +\frac{c}{\mathfrak{B}} \times \frac{\sin.\text{tot.}}{\sin.\gamma}\,\text{Cosec.}(2R - (\alpha - A)) - \text{Cotg.}(2R - (\alpha - A))$$
$$= -\frac{c\sin.\beta}{b\sin.\gamma}\,\text{Cosec.}(2R - (\alpha - A)) - \text{Cotg.}(2R - (\alpha - A))\ \text{in } \textit{Fig.}\ 65.$$

$$\text{Cotg. CAD} = +\frac{\mathfrak{B}}{a} \times \frac{\sin.\alpha}{\sin. tot.} \text{Cosec.}(\gamma - C) - \text{Cotg.}(\gamma - C)$$

$$= +\frac{b \sin.\alpha}{a \sin.\beta} \text{Cosec.}(\gamma - C) - \text{Cotg.}(\gamma - C) \text{ in } Fig. 59.$$

$$= -\frac{\mathfrak{B}}{a} \times \frac{\sin.\alpha}{\sin. tot.} \text{Cosec.}(C - \gamma) + \text{Cotg.}(C - \gamma)$$

$$= -\frac{b \sin.\alpha}{a \sin.\beta} \text{Cosec.}(C - \gamma) + \text{Cotg.}(C - \gamma) \text{ in } Fig. 61.$$

$$= +\frac{\mathfrak{B}}{a} \times \frac{\sin.\alpha}{\sin. tot.} \text{Cosec.}(\gamma + C) - \text{Cotg.}(\gamma + C)$$

$$= +\frac{b \sin.\alpha}{a \sin.\beta} \text{Cosec.}(\gamma + C) - \text{Cotg.}(\gamma + C) \text{ in } Fig. 63.$$

$$= +\frac{\mathfrak{B}}{a} \times \frac{\sin.\alpha}{\sin. tot.} \text{Cos.}(2R - (\gamma - C)) - \text{Cotg.}(2R - (\gamma - C))$$

$$= -\frac{b \sin.\alpha}{a \sin.\beta} \text{Cos.}(2R - (\gamma - C)) - \text{Cotg.}((2R - (\gamma - C)) \text{ in } Fig. 65.$$

u. ſ. w.

41.) In den Dreyeken ABJ (*Fig.* 59. 61. 63. 65.) iſt

$$BJ^2 = AJ^2 + AB^2 - 2AJ \times AB \frac{\text{Cosin. BAJ}}{\sin. tot.} \quad (\S. 76.)$$

$$= \mathfrak{B}^2 \left(\frac{\sin.\gamma}{\sin. tot.}\right)^2 + c^2 - 2\mathfrak{B}c \frac{\sin.\gamma \text{ Cosin. BAJ}}{\sin. tot.^2}$$

$$= \left(\frac{\sin.\gamma}{\sin. tot.}\right)^2 \left(\mathfrak{B}^2 + \left(\frac{c \sin. tot.}{\sin.\gamma}\right)^2 - 2\mathfrak{B} \times \frac{c \sin. tot.}{\sin.\gamma} \times \frac{\text{Cosin. BAJ}}{\sin. tot.}\right)$$

$$= \left(\frac{\sin.\gamma}{\sin. tot.}\right)^2 \left(\mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2 - 2\mathfrak{B}\mathfrak{C} \frac{\text{Cosin. BAJ}}{\sin. tot.}\right) \quad (2)$$

$$BJ = \frac{\sin.\gamma}{\sin. tot.} \sqrt{\mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2 - 2\mathfrak{B}\mathfrak{C} \frac{\text{Cosin. BAJ}}{\sin. tot.}}$$

daher $AJ : BJ = \mathfrak{B} : \sqrt{\mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2 - 2\mathfrak{B}\mathfrak{C} \frac{\text{Cosin. BAJ}}{\sin. tot.}}$ (28)

42.) Ebenſo iſt in den Dreyeken CBJ

$$BJ^2 = BC^2 + CJ^2 - 2BC \times CJ \frac{\text{Cosin. BCJ}}{\sin. tot.} \quad (\S. 76.)$$

$$= a^2 + \mathfrak{B}^2 \left(\frac{\sin.\alpha}{\sin. tot.}\right)^2 - 2a\mathfrak{B} \frac{\sin.\alpha \text{ Cosin. BCJ}}{\sin. tot.^2} \quad (28)$$

$$= \left(\frac{\sin.\alpha}{\sin. tot.}\right)^2 \left(\left(\frac{a \sin. tot.}{\sin.\alpha}\right)^2 + \mathfrak{B}^2 - \frac{2a \sin. tot.}{\sin.\alpha} \mathfrak{B} \frac{\text{Cosin. BCJ}}{\sin. tot.}\right)$$

$$= \left(\frac{\sin.\alpha}{\sin.\text{tot.}}\right)^2 \left(\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 - 2\mathfrak{A}\mathfrak{B}\frac{\text{Cosin. BCJ}}{\sin.\text{tot.}}\right) \quad (2)$$

$$\text{BJ} = \frac{\sin.\alpha}{\sin.\text{tot.}} \sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 - 2\mathfrak{A}\mathfrak{B}\frac{\text{Cosin. BCJ}}{\sin.\text{tot.}}}$$

$$\text{CJ} : \text{BJ} = \mathfrak{B} : \sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 - 2\mathfrak{A}\mathfrak{B}\frac{\text{Cosin. BCJ}}{\sin.\text{tot.}}} \quad (28)$$

43.) Hieraus lassen sich ähnliche Ausdrüke für DA, DC, wie in 26. für DB, folgern; welche der Berechnung der Sinus der Winkel DBA, DBC überheben. Nämlich

$$\text{DA} : \text{AB} = \sin. \left\{\begin{matrix}\text{ABD}\\ \text{ABJ}\end{matrix}\right\} : \sin.\text{ADB}$$

$$\text{AB} : \mathfrak{C} = \sin.\text{ADB} : \sin.\text{tot.} \quad (2)$$

$$\text{DA} : \mathfrak{C} = \sin.\text{ABJ} : \sin.\text{tot.}$$

$$\text{DA} : \mathfrak{C}\frac{\sin.\text{BAJ}}{\sin.\text{tot.}} = \sin.\text{ABJ} : \sin.\text{BAJ}$$

$$= \text{AJ} : \text{BJ}$$

$$= \mathfrak{B} : \sqrt{\mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2 - 2\mathfrak{B}\mathfrak{C}\frac{\text{Cosin. BAJ}}{\sin.\text{tot.}}} \quad (41)$$

Also $$\text{DA} = \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{C}\frac{\sin.\text{BAJ}}{\sin.\text{tot.}}}{\sqrt{\mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2 - 2\mathfrak{B}\mathfrak{C}\frac{\text{Cosin.BAJ}}{\sin.\text{tot.}}}}$$

Ebenso $$\text{DC} : \text{BC} = \sin. \left\{\begin{matrix}\text{CBD}\\ \text{CBJ}\end{matrix}\right\} : \sin.\text{BDC}$$

$$\text{BC} : \mathfrak{A} = \sin.\text{BDC} : \sin.\text{tot.}$$

$$\text{DC} : \mathfrak{A} = \sin.\text{CBJ} : \sin.\text{tot.}$$

$$\text{DC} : \mathfrak{A}\frac{\sin.\text{BCJ}}{\sin.\text{tot.}} = \sin.\text{CBJ} : \sin.\text{BCJ}$$

$$= \text{CJ} : \text{BJ}$$

$$= \mathfrak{B} : \sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 - 2\mathfrak{A}\mathfrak{B}\frac{\text{Cosin. BCJ}}{\sin.\text{tot.}}}$$

Daher $$\text{DC} = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\frac{\sin.\text{BCJ}}{\sin.\text{tot.}}}{\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 - 2\mathfrak{A}\mathfrak{B}\frac{\text{Cosin. BCJ}}{\sin.\text{tot.}}}}$$

44.) Folglich (29.)

$$DA = \frac{\mathfrak{BC}\,\frac{\sin.(\alpha - A)}{\text{sin. tot.}}}{\sqrt{\mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2 - 2\mathfrak{BC}\,\frac{\text{Cosin.}(\alpha - A)}{\text{sin. tot.}}}} \text{ in } \textit{Fig.}\ 59.$$

$$= \frac{\mathfrak{BC}\,\frac{\sin.(A - \alpha)}{\text{sin. tot.}}}{\sqrt{\mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2 - 2\mathfrak{BC}\,\frac{\text{Cosin.}(A - \alpha)}{\text{sin. tot.}}}} \text{ in } \textit{Fig.}\ 61.$$

$$= \frac{\mathfrak{BC}\,\frac{\sin.(\alpha + A)}{\text{sin. tot.}}}{\sqrt{\mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2 - 2\mathfrak{BC}\,\frac{\text{Cosin.}(\alpha + A)}{\text{sin. tot.}}}} \text{ in } \textit{Fig.}\ 63.$$

$$= \frac{\mathfrak{BC}\,\frac{\sin.(2R - (\alpha - A))}{\text{sin. tot.}}}{\sqrt{\mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2 - 2\mathfrak{BC}\,\frac{\text{Cos.}(2R - (\alpha - A))}{\text{sin. tot.}}}} \text{ in } \textit{Fig.}\ 65.$$

$$DC = \frac{\mathfrak{AB}\,\frac{\sin.(\gamma - C)}{\text{sin. tot.}}}{\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 - 2\mathfrak{AB}\,\frac{\text{Cosin.}(\gamma - C)}{\text{sin. tot.}}}} \text{ in } \textit{Fig.}\ 59.$$

$$= \frac{\mathfrak{AB}\,\frac{\sin.(C - \gamma)}{\text{sin. tot.}}}{\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 - 2\mathfrak{AB}\,\frac{\text{Cosin.}(C - \gamma)}{\text{sin. tot.}}}} \text{ in } \textit{Fig.}\ 61.$$

$$= \frac{\mathfrak{AB}\,\frac{\sin.(\gamma + C)}{\text{sin. tot.}}}{\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 - 2\mathfrak{AB}\,\frac{\text{Cosin.}(\gamma + C)}{\text{sin. tot.}}}} \text{ in } \textit{Fig.}\ 63.$$

$$= \frac{\mathfrak{AB}\,\frac{\sin.(2R - (\gamma - C))}{\text{sin. tot.}}}{\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 - 2\mathfrak{BC}\,\frac{\text{Cos.}(2R - (\gamma - C))}{\text{sin. tot.}}}} \text{ in } \textit{Fig.}\ 65.$$

45.) Wenn die Lage der drey Punkte A, B, C (*Fig.* 58. 65.) durch Perpendikel, welche auf eine der Lage nach gegebene gerade Linie gefällt sind, und durch die Abstände der Fußpunkte dieser Perpendikel von einem in dieser Linie gegebenen Punkt gegeben ist: so kann man daraus leicht die Seiten des Dreyeks ABC und seine Winkel berechnen. Erstere sind nämlich die Hypotenusen rechtwinklichter Dreyeke, deren Seiten um den rechten Winkel die Summe oder Differenz der von ihren Endpunkten gefällten Perpendikel, und die Abstände dieser Perpendikel von einander sind. Hieraus ergiebt sich dann nach dem bisher gezeigten die Lage eines vierten Punkts D, an welchem die Winkel ADB, BDC sind beobachtet worden. Den vierten Punkt D unmittelbar durch die gegebenen Stüke zu bestimmen lehrt de Lambre (Méthodes analytiques pour la détermination d'un arc du méridien, p. 143. sqq.).

1. Beyspiel. *Fig.* 58.

AB = c = 2105 Fuß.
BC = a = 1423

Lg. c sin. tot. = 13,3232521
Lg. a sin. tot. = 13,1532049
Lg. sin. γ = 9,8133919
Lg. sin. α = 9,6900983
Lg. ℭ = 3,5098602
Lg. 𝔄 = 3,4631066
Lg. 2 = 0,3010300
Lg. EB = 3,2088302
Lg. FB = 3,1620766
Lg. Tg. $\frac{F+E}{2}$ = 10,4389341;
Lg. (EB-FB) = 2,2176945
12,6566286
Lg. (EB+FB) = 3,4871121
Lg. Tg. $\frac{F-E}{2}$ = 9,1695165;
Lg. $\frac{AB}{\sin. ADB}$ = Lg. ℭ-Lg. s.t.
= 3,5098602-10
Lg. sin. ABD = 9,9900939
Lg. sin. BAD = 9,9443910
Lg. AD = 3,4994541
Lg. BD = 3,4541512
Lg. $\frac{BC}{\sin. BDC}$ = Lg. 𝔄-Lg. s.t.
= 3,4631066-10
Lg. sin. CBD = 9,9788471
Lg. sin. BCD = 9,9910447
Lg. CD = 3,4419537
Lg. BD = 3,4541513

ABC = 150° 4' 15",7
ADB = γ = 40 35 44 ,3
BDC = α = 29 20 0
γ+α = β = 69 55 44 ,3
B+β = 220 0 0
180
EBF = 40 0 0
EFB+BEF = 140 0 0
$\frac{F+E}{2}$ = 70 0 0

EB = 1617,4475 F.
FB = 1452,3675
EB-FB = 165,0800
EB+FB = 3069,8150

$\frac{F+E}{2}$ / $\frac{BCD+BAD}{2}$ = 70° 0' 0"

$\frac{F-E}{2}$ / $\frac{BCD-BAD}{2}$ = 8 24 16

EFB / BCD = 78 24 16
BFE / BAD = 61 35 44
BDC = 29 20 0
ADB = 40 35 44,3
107 44 16
102 11 28,3
179 59 60
CBD = 72 15 44
ABD = 77 48 31,7
AD = 3161,944 F.
BD = 2845,45 {16 / 22}
CD = 2766,646

Oder nach n. 18. ff.

Lg. c sin. tot.	= 13,3232521	B	= 150° 4 15,"7
Lg. sin. α	= 9,6900983	β	= 69 55 44, 3
	23,0133504	B + β	= 220 0 0
Lg. a	= 3,1532049;		360
Lg. sin. γ	= 9,8133919	4R - (B+β)	= 140 0 0
	12,9665968	$\frac{4R-(B+\beta)}{2}$	= 70 0 0
Lg. Tg. Δ	= 10,0467536;	Δ	= 48 4 41,25
Lg. Tg. (Δ-45°)	= 8,7305817;	Δ - 45°	= 3 4 41,25
Lg. Tg. $\left(\frac{4R-(B+\beta)}{2}\right)$	= 10,4389341	$\frac{BCD+BAD}{2}$	= 70 0 0
Lg. Tg. $\frac{BCD-BAD}{2}$	= 9,1695158;	$\frac{BCD-BAD}{2}$	= 8 24 15,9
Lg. AB	= 3,3232521	BCD	= 78 24 15,9
Lg. sin. ADB	= 9,8133919	BAD	= 61 35 44,1
	3,5098602	BDC	= 29 20 0
Lg. sin. ABD	= 9,9900937	ADB	= 40 35 44,3
Lg. sin. BAD	= 9,9442911		107 44 15,9
Lg. AD	= 3,4999539		102 11 28,4
Lg. BD	= 3,4541513		179 59 60
Lg. BC	= 3,1532049	CBD	= 72 15 44,1
Lg. sin. BDC	= 9,6900983	ABD	= 77 48 31,6
	3,4631066	AD	= 3161,942 Fuß.
Lg. sin. CBD	= 9,9788472	BD	= 2845,45 {22 16
Lg. sin. BCD	= 9,9910446	CD	= 2766,646
Lg. CD	= 3,4419538		
Lg. BD	= 3,4541512		

Berechnung des Winkels BAD nach n. 21.

Lg. c = 3,3232521
Lg. sin. α = 9,6900983
Lg. Cosec. (B+β-2R) = 10,1919325 $\left.\begin{matrix} B+\beta-2R \\ EBF \end{matrix}\right\} = 40°\,0'$
23,2052829
Lg. a = 3,1532049
Lg. sin. γ = 9,8133919
12,9665968
10,2386861 ; 17325514 (2. Anm. §. 91. S. 194.)
Cotg. (B+β-2R) = 11917536
Cotg. BAD = 5407978 für den Halbm. 10 000 000
= 0,5407978 für den Halbm. = 1
BAD = 61° 35' 44,"07

Berechnung von BD nach der Formel n. 26.

$$BD = \frac{\mathfrak{AC}\,\frac{\sin. EBF}{\sin tot.}}{\sqrt{\mathfrak{A}^2+\mathfrak{C}^2-2\mathfrak{AC}\,\frac{Cosin. EBF}{\sin. tot.}}}$$

$$= \frac{\frac{\sin. EBF}{\sin tot.}\sqrt{\mathfrak{AC}}}{\sqrt{\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}}+\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}-\frac{2Cosin\,EBF}{\sin. tot.}}}$$

Lg. $\mathfrak{A}$ = 3,4631066 Siehe oben.
Lg. $\mathfrak{C}$ = 3,5098602
Lg. $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}}$ = 9,9532464-10 ; $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}}$ = 0,8979379.6
Lg. $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}$ = 0,0467536 $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}$ = 1,1136625.6
Lg. $\mathfrak{AC}$ = 6,9729668 2,0116005
Lg. $\sqrt{\mathfrak{AC}}$ = 3,4864834 $\frac{2Cosin.EBF}{\sin. tot.}$ = 1,5320888
Lg. sin. EBF = 9,8080675 N = 0,4795117
3,2945509
Lg. N = 1,6807992-2
Lg. $\sqrt{N}$ = 0,8403996-1
Lg. BD = 3,4541513 ; BD = 2845,4522 F.

2. Beyspiel. *Fig.* 60.

$AB = c = 1034$ F. $ABC = B = 115° 0'$
$BC = a = 1325$ $ADB = \gamma = 16\ 30$
$BDC = \alpha = 25\ 34$
$\gamma + \alpha = \beta = 42\ 4$
$B + \beta = 157\ 4$
$\frac{B+\beta}{2} = 78\ 37$

Lg. c sin. tot. = 13,0145205
Lg. sin. α = 9,6350422
22,6495627
Lg. a = 3,1222159
Lg. sin. γ = 9,4533418
12,5755577
Lg. Tg. Δ = 10,0740050;
Lg. Tg. (Δ-45°) = 8,9293973;
Lg. Tg. $\frac{B+\beta}{2}$ = 10,6960857
Lg. Tg. $\frac{BAD-BCD}{2}$ = 9,6254830;
Lg. AB = 3,0145205
Lg. sin. ADB = 9,4533418
3,5611787
Lg. sin. ABD = 9,8010053
Lg. sin. BAD = 9,9171809
Lg. AD = 3,3621840
Lg. BD = 3,4783506
Lg. BC = 3,1222159
Lg. sin. BDC = 9,6350422
3,4871737
Lg. sin. CBD = 9,9807863
Lg. sin. BCD = 9,9911858
Lg. CD = 3,4739600
Lg. BD = 3,4783595

$\Delta = 49° 51' 29'',6$
$\Delta - 45° = 4\ 51\ 29,6$
$2R - \frac{B+\beta}{2}$ / $\frac{BAD+BCD}{2}$ = 101 23 0
$\frac{BAD-BCD}{2} = 22\ 53\ 16,1$
$BAD = 124\ 16\ 16,1$
$BCD = 78\ 29\ 43,9$
$ADB = 16\ 30\ 0$
$BDC = 25\ 34\ 0$
140 46 16,1
104 3 43,9
179 59 60
$ABD = 39\ 13\ 43,9$
$CBD = 75\ 56\ 16,1$
$AD = 2302,4169$ F.
$BD = 3008,56\{^{62}_{55}$
$CD = 2978,2418$

3. Beyspiel.. *Fig. 62.*

AB = c = 1725 F. ABC = B = 206° 40′
BC = a = 1078 ADB = γ = 34 8
Lg. c sin. tot. = 13,2367891 BDC = α = 25 34
Lg. sin. α = 9,6350422 γ + α = β = 59 42
22,8718313 B + β = 266 22
Lg. a = 3,0326188 359 60
Lg. sin. γ = 9,7490562 93 38
12,7816750 $\frac{BCD+BAD}{2}$ = 46 49 0″
Lg. Tg. Δ = 10,0901563; Δ = 50 54 17″,38
Lg. Tg. (Δ-45°) = 9,0146260; Δ-45° = 5 54 17,38
Lg. Tg. $\frac{BCD+BAD}{2}$ = 10,0275587 = Lg. Tg. $(2R - \frac{B+\beta}{2})$
Lg. Tg. $\frac{BCD-BAD}{2}$ = 9,0421847; $\frac{BDC-BAD}{2}$ = 6° 17′ 19″,2
Lg. AB = 3,2367891 BCD = 53 6 19,2
Lg. sin. ADB = 9,7490562 BAD = 40 31 40,8
3,4877329 BDC = 25 34 0
Lg. sin. ABD = 9,9842478 ADB = 34 8 0
Lg. sin. BAD = 9,8127928 78 40 19,2
Lg. AD = 3,4749807 74 39 40,8
Lg. BD = 3,3005257 179 59 60,0
Lg. BC = 3,0326188 CBD = 101 19 40,8
Lg. sin. BDC = 9,6350422 ABD = 105 20 19,2
3,3975766 AD = 2964,699 Fuß.
Lg. sin. CBD = 9,9914560 BD = 1997,679
Lg. sin. BCD = 9,9029491 CD = 2449,247
Lg. CD = 3,3890326
Lg. BD = 3,3005257

4. Beyſpiel. *Fig.* 64.

AB = c = 3582 F.		ABC = B =	87°32′
BC = a = 2964		ADB = γ =	101 28
Lg. csin. tot. =	13,5541256	BDC = α =	99 56
Lg. sin. α =	9,9934403	γ + α = β =	201 16
	23,5475659	B + β =	288 48
Lg. a =	3,4718782		359 60
Lg. sin. γ =	9,9914478	$\frac{4R-(B+\beta)}{2}$ =	71 12
	13,4633260		35 36
Lg. Tg. Δ =	10,0842399;	Δ =	50°31′20″,28
Lg. Tg. (Δ − 45°) =	8,9853450	Δ − 45° =	5 31 20,28
Lg. Tg. $\frac{BCD+BAD}{2}$ =	9,8548704;	$\frac{BCD+BAD}{2}$ =	35 36 0
Lg. Tg. $\frac{BCD-BAD}{2}$ =	8,8402154;	$\frac{BCD-BAD}{2}$ =	3 57 34,4
Lg. AB =	3,5541256	BCD =	39 33 34,4
Lg. sin. ADB =	9,9914478	BAD =	31 38 25,6
	3,5626778	BDC =	99 56 0
Lg. sin. ABD =	9,8643127	ADB =	101 20 0
Lg. sin. BAD =	9,7198176		139 29 34,4
Lg. AD =	3,4269905		132 58 25,6
Lg. BD =	3,2824954		179 59 60
Lg. BC =	3,4718782	CBD =	40 30 25,6
Lg. sin. BDC =	9,9934403	ABD =	47 1 34,4
	3,4784379	AD =	2672,948 Fuß.
Lg. sin. CBD =	9,8126075	BD =	1916,440
Lg. sin. BCD =	9,8040575	CD =	1954,544
Lg. CD =	3,2910454		
Lg. BD =	3,2824954		

Anwendung der Berechnungsart n. 28. ff. auf das erste der vorhergehenden Beyspiele.

Aus den Seiten AB, BC (*Fig.* 59.), und dem Winkel ABC findet man (§. 81.) A=12° 0' 24,1; C=17° 55' 20,2 und Lg. AC=3,5331232.

		CAJ =	29° 20' 0"
Lg. AC =	3,5331232	CAB =	12 0 24,1
Lg. sin. β =	9,9727895	BAJ =	17 19 35,9
	3,5603337		179 59 60,0
Lg. sin. γ =	9,8133919;		102 40 24,1
Lg. AJ =	3,3737256;	$\frac{ABJ+AJB}{2}$ =	81 20 12,05
Lg. Tg. ½Summe =	10,8171109;	AJ =	2364,425 Fuß.
Lg. Unterſch. =	2,4140119	AB =	2105
	13,2311228	Unterſch. =	259,425
Lg. Summe =	3,6502517	Summe =	4469,425
Lg. Tg. ½Unterſ. =	9,5808711;	$\frac{ABJ-AJB}{2}$ =	20° 51' 16",11
Lg. $\frac{AC}{\sin.\beta}$ =	3,5603337;	ABJ / 2R-ABD =	102 11 28,16
Lg. sin. ACD =	9,9396205	AJB / ACD =	60 28 55,94
Lg. sin. CAD =	9,8816197		
Lg. AD =	3,4999542	ADC / β =	69 55 44,30
Lg. CD =	3,4411534		130 24 40,24
	u. ſ. w.		179 59 60,00
		DAC =	49 35 19,76
		ACB =	17 55 20,2
		BAC =	12 0 24,1
		BCD =	78 24 16,14
		BAD =	61 35 43,86
Oben wurde gefunden		2R-ABD =	102 11 28,16
			179 59 60
		ABD =	77 48 31,84

Berechnung von DA nach dem n. 44. gegebenen Ausdruk, welcher sich zur bequemeren Rechnung in folgenden verwandeln läßt.

$$DA = \frac{\frac{\sin.(\alpha-A)}{\sin.tot.}\sqrt{\mathfrak{BC}}}{\sqrt{\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}}+\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}}-\frac{2\cos.(\alpha-A)}{\sin.tot.}}}$$

Lg. b sin. tot. =	13,5331232	α =	29° 20' 0"
Lg. c sin. tot. =	13,3232521	A =	12 0 24,1
Lg. sin. β =	9,9727895	α - A =	17 19 35,9
Lg. sin. γ =	9,8133919		
Lg. $\mathfrak{B}$ =	3,5603337		
Lg. $\mathfrak{C}$ =	3,5098602		
Lg. $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}}$ =	0,0504735;	$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}}$ =	1,1232424
Lg. $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}}$ =	9,9495265-10;	$\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}}$ =	0,8902798
Lg. $\mathfrak{BC}$ =	7,0701939		2,0135222
Lg. $\sqrt{\mathfrak{BC}}$ =	3,5350969.5;	$\frac{2\cos.(\alpha-A)}{\sin.tot.}$ =	1,9092448
Lg. sin. $(\alpha-A)$ =	9,4739520	N =	0,1042774
	3,0090489.5		
Lg. N =	1,0181903-2		
Lg. $\sqrt{N}$ =	0,5090951.5-1		
Lg. DA =	3,4999538	DA =	3161,941 + Fuß.

§. 121.

In dem Fünfek ABCDE *Fig.* 69. sind drey aneinander liegende Seiten AB, BC, CD, und vier Winkel am Umfang, folglich auch der fünfte Winkel gegeben. Man sucht die übrigen zwey Seiten AE, DE, und den Inhalt des Fünfeks.

1.) Zieht man die Diagonalen AC, AD: so kennt man des Dreyeks ABC zwey Seiten AB, BC, und den Winkel

ABC; folglich kann man die Winkel BAC, ACB, und die Seite AC finden (§. 81.). Alsdenn kennt man in dem Dreyek ACD die Seiten AC, CD, und den Winkel ACD = BCD - ACB. Man findet also wie vorhin die Winkel CDA, DAC, und die Seite AD. Endlich ist des Dreyeks ADE Seite AD sammt den Winkeln ADE = CDE - CDA, DAE = BAE - (BAC + CAD), und AED bekannt; woraus die Seiten AE, DE gefunden werden können (§. 18.). Der Inhalt des Fünfeks ist gleich der Summe der Dreyeke ABC, ACD, ADE, deren Inhalt sich aus den vorhin gefundenen Stüken nach §. 75. und 18. ergiebt.

2.) Oder, wird die Diagonale AD, welche die Endpunkte A, D der gesuchten Seiten AE, DE verbindet, gezogen: so findet man aus den drey aneinander liegenden Seiten AB, BC, CD des Viereks ABCD, und den dazwischen begriffenen Winkeln ABC, BCD, die vierte Seite AD, und die übrigen zwey Winkel BAD, ADC nach §. 114. Alsdenn kennt man wiederum in dem Dreyek ADE eine Seite AD, und die Winkel ADE = CDE - CDA, DAE = BAE - BAD, und AED; woraus die Seiten AE, DE gefunden werden können. Der Inhalt des Fünfeks ergiebt sich aus dem Vierek ABCD und dem Dreyek ADE; wovon jenes nach §. 114, dieses nach §. 18. berechnet wird.

Soll nun ferner das Fünfek durch eine gerade Linie CP, welche durch die Eke C geht, in einem gegebenen Verhältniß getheilt werden: so ist der Inhalt des Viereks ABCP; folglich, weil man den Inhalt des Dreyeks ABC kennt, der Inhalt des Dreyeks ACP gegeben. Aber $\frac{AC \times AP}{2 \sin. tot.} \sin. CAP = \triangle ACP$ (§. 75); folgl. $AP = \frac{2 \triangle ACP \sin. tot.}{AC \sin. CAP}$. Würde $AP > AE$ gefunden: so fiele der Theilungspunkt auf die Seite DE, und würde aus dem Ueberschuß des abzuschneidenden Stüks über das Vierek ABCE wie vorhin bestimmt.

Beyspiel. *Fig.* 69.

AB = 370 Fuß.
BC = 420
CD = 350
BC-AB = 50
BC+AB = 790

EAB = 85° 0′
ABC = 132 10
BCD = 99 40
CDE = 114 8
430 58
3.180° = 540 0
folgl. AED = 109 2
179. 60
132 10
47 50

Lg.(BC-AB) = 1,6989700
Lg. Tg. $\frac{A+C}{2}$ = 9,6468810
11,3458510
Lg.(BC+AB) = 2,8976271
Lg. Tg. $\frac{A-C}{2}$ = 8,4482239;
Lg. AB = 2,5682017
Lg. sin. ACB = 9,5793254
2,9888763
Lg. sin. ABC = 9,8699326
Lg. AC = 2,8588089
Lg.(AC-CD) = 2,5710701
Lg. Tg. ½ Summe = 10,0966134
12,6676835
Lg.(AC+CD) = 3,0303777
Lg. Tg. ½ Unts. = 9,6373058;
Lg. AC = 2,8588089
Lg. sin. CDA = 9,9844793
2,8743296
Lg. sin. ACD = 9,9893412
Lg. AD = 2,8636708.
Lg. sin. AED = 9,9755830
2,8880878
Lg. sin. DAE = 9,7193986
Lg. sin. ADE = 9,8022223.5
Lg. DE = 2,6074864;
Lg. AE = 2,6903101.5;

$\frac{A+C}{2}$ = 23 55 0″
$\frac{A-C}{2}$ = 1 36 28″,09
BAC = 25 31 28,09
ACB = 22 18 31,91
BCD = 99 40 0
ACD = 77 21 28,09
179 59 60,00
102 38 31,91
$\frac{CDA+CAD}{2}$ = 51 19 15,955.
AC = 722,4518 Fuß.
CD = 350,0000
AC-CD = 372,4518
AC+CD = 1072,4518
$\frac{CDA-CAD}{2}$ = 23 27 7,139
CDA = 74 46 23,094
CAD = 27 52 8,816
CDE = 114 8 0
ADE = 39 21 36,906
AED = 109 2 0
148 23 36,906
179 59 60,000
DAE = 31 36 23,094
DE = 405,0293 Fuß.
AE = 490,1288

Berechnung des Inhalts.

Lg AB = 2,5682017
Lg. BC = 2,6232493
Lg. sin. ABC = 9,8699326
5,0613836; 2ΔABC = 115181,7 Q. F.
Lg. AE = 2,6903101,5
Lg. DE = 2,6074864
Lg. sin. AED = 9,9755830
5,2733795,5; 2ΔAED = 187663,4
Lg. AC = 2,8588089
Lg. CD = 2,5440680
Lg. sin. ACD = 9,9893412
5,3922181; 2ΔACD = 246727,8
549572,9
Inhalt des Fünfeks = 274786,45 Q. F.

Das Fünfek soll durch die gerade Linie CP halbirt werden.

Inhalt des abzuschneidenden Stüks = 137393,225 Qf.
Inhalt des Δ ABC = 57590,850
Δ ACP = 79802,375
2Δ ACP = 159604,750

Lg. 2.ΔACP s. t. = 15,2030448 EAB = 85° 0′ 0″
Lg. AC = 2,8588089 CAB = 25 31 28,09
Lg. sin. CAP = 9,9352110 CAP = 59 28 31,91
12,7940199
Lg. AP = 2,4090249; AP = 256,463 Fuß.
AE = 490,129
PE = 233,666

Zweyte Berechnungsart mittelst des Viereks ABCD.

Es ist allgemein (§. 115.)

$$\text{Tg.ADC} = \frac{\text{BC}\frac{\text{sin. BCD}}{\text{sin. tot.}} - \text{AB}\frac{\text{sin. (BCD+ABC)}}{\text{sin. tot.}}}{\text{CD} - \left(\text{BC}\frac{\text{Cos. BCD}}{\text{sin. tot.}} - \text{AB}\frac{\text{Cos. (BCD+ABC)}}{\text{sin. tot.}}\right)} \text{sin. tot.}$$

und

$$\text{AD} = \left(\text{CD} - \left(\text{BC}\frac{\text{Cos. BCD}}{\text{sin. tot.}} - \text{AB}\frac{\text{Cos. (BCD+ABC)}}{\text{sin. tot.}}\right)\right)\frac{\text{sin. tot.}}{\text{Cosin. ADC}}$$

welche leztere Formel sich aus der §. 114. S. 246 ergiebt, wenn man statt $\frac{\text{sec.}}{\text{sin. tot.}}$ sezt $\frac{\text{sin. tot.}}{\text{Cosin.}}$ (§. 72.) u. $\left.\begin{matrix}\text{Cosin. FDC}\\ \text{Cosin.(2R-ADC)}\end{matrix}\right\}$ = - Cosin. ADC (§. 42. 43.).

Lg. BC =	2,6232493	BCD =	99°40'
Lg. sin, BCD =	9,9937894	ABC =	132 10
Lg. Cos. BCD =	9,2250918	BCD+ABC =	231 50
	2,6170387;	$BC\frac{\text{sin. BCD}}{\text{sin. tot.}}$ =	414,03657
	1,8483411;	$BC\frac{\text{Cosin.BCD}}{\text{sin. tot.}}$ =	-70,52468
Lg. AB =	2,5682017		
Lg. sin. (C+B) =	9,8955422		
Lg.Cosin.(C+B) =	9,7900541		
	2,4637439;	$AB\frac{\text{sin.(C+B)}}{\text{sin. tot.}}$ =	-290,90013
	2,3591558;	$AB\frac{\text{Cos.(C+B)}}{\text{sin. tot.}}$ =	-228,64189
	$BC\frac{\text{sin. BCD}}{\text{sin. tot.}} - AB\frac{\text{sin. (C+B)}}{\text{sin. tot.}}$ =		704,93670
	$BC\frac{\text{Cosin. BCD}}{\text{sin. tot.}} - AB\frac{\text{Cos. (C+B)}}{\text{sin. tot.}}$ =		158,11721
	CD =		350,
			191,88279

Lg.(704,9....)s.t. =	12,8481501.3		
Lg.(191,8...) =	2,2830359.6		
Lg. Tg. ADC =	10,5651141.7;	ADC =	74°46' 23",09
Lg.Cosin.ADC =	9,4193650.8	EDC =	114 8 0
Lg. AD =	2,8636708.8	ADE =	39 21 36,91
Lg. sin. AED =	9,9755830	AED =	109 2 0
	2,8880878,8		148 23 36,91
Lg. sin. ADE =	9,8022223.6		179 59 60,
Lg. sin. DAE =	9,7193986	DAE =	31 36 23,09
Lg. AE =	2,6903102.4;	AE =	490,1289 Fuß.
Lg. DE =	2,6074864,8;	DE =	405,0293
$\text{Lg.}\frac{\text{AE}\times\text{DE sin. AED}}{\text{sin. tot.}}$ =	5,2733797,2;	$2\Delta\text{AED}$ =	187663,5 Q.F.

Inhalt des Vierecks ABCD

$$= \frac{AB \times BC \sin. ABC + BC \times CD \sin. BCD - AB \times CD \sin. (ABC + BCD)}{2 \sin. tot.}$$

$$= \frac{AB \times BC \sin.(47°50') + BC \times CD \sin.(80°20') + AB \times CD \sin.(51°50')}{2 \sin. tot.}$$

weil sin. ABC = sin.(132°10') = sin.(47°50')
sin. BCD = sin.(99°40') = sin.(80°20') (§. 14. S. 19)
sin. (ABC + BCD) = sin.(231°50') = -sin.(51°50') (§. 113. S. 236.)

Lg. AB =	2,5682017	
Lg. BC =	2,6232493	
Lg. sin. ABC =	9,8699326	
	5,0613836 ;	115181,70 Q. F.
Lg. BC =	2,0232493	
Lg. CD =	2,5440680	
Lg. sin. BCD =	9,9937894	
	5,1611067 ;	144912,77
Lg. AB =	2,5682017	
Lg. CD =	2,5440680	
Lg. sin. (B+C) =	9,8955422	
	5,0078119 ;	101815,03
2 Viereck ABCD =		361909,50
2 △AED =		187663,5
	2)	549573,0
Inhalt des Fünfeks =		274786,5 Q. F.

3.) Werden die Diagonalen des Fünfeks nicht zu wissen verlangt; so wird folgende Methode die übrigen Seiten zu berechnen bequemer seyn. Auf die der gesuchten DE anliegende unbekannte Seite AE (*Fig.* 70.) fälle man aus den Eken der Figur die Perpendikel BB', CC', DD', und ziehe durch die Endpunkte B, D der kleineren Perpendikel die Parallelen Bp, Dq mit AE, welche dem gröſten Perpendikel begegnen in p und q. Durch A ziehe man auf derselben Seite von AB, auf welcher BC liegt, die Parallele Ac mit BC; ebenso auf derselben Seite der Dia-

gonale AC, auf welcher CD liegt, die Parallele Ad mit CD. Alsdenn ist, wenn man die äusseren Winkel FAB, GBC, HCD des Fünfeks beziehungsweise mit A, B, C bezeichnet:

$$BAc = B$$
$$cAd = C$$

mithin $\left.\begin{matrix} FAB+BAc \\ FAc \end{matrix}\right\} = A+B$

$$\left.\begin{matrix} FAc+cAd \\ FAd \end{matrix}\right\} = A+B+C$$

Ferner ist $CBp = cAE = 2R-(A+B)$

$$CDq = dAE = A+B+C-2R$$

folglich $BB' = AB\,\frac{\sin. A}{\sin tot.}$

$$Cp = BC\,\frac{\sin. CBp}{\sin. tot.} = BC\,\frac{\sin.(A+B)}{\sin. tot.}$$

$$\left.\begin{matrix} BB'+Cp \\ 'CC' \end{matrix}\right\} = \frac{AB \sin. A + BC \sin.(A+B)}{\sin. tot.}$$

$$Cq = CD\,\frac{\sin. CDq}{\sin. tot.} = -CD\,\frac{\sin.(A+B+C)}{\sin. tot.}\ (\S.113.)$$

$$\left.\begin{matrix} CC'-Cq \\ DD' \end{matrix}\right\} = \frac{AB \sin. A + BC \sin.(A+B) + CD \sin.(A+B+C)}{\sin. tot.}$$

daher $DE = \frac{DD' \sin. tot.}{\sin. E} = \frac{AB \sin. A + BC \sin.(A+B) + CD \sin.(A+B+C)}{\sin. E}$

Werden die Perpendikel auf die andere unbekannte Seite DE gefällt: so erhält man auf dieselbe Art

$$AE = \frac{CD \sin. D + BC \sin.(D+C) + AB \sin.(D+C+B)}{\sin. E}$$

Endlich ist

$$\left.\begin{matrix} AB' = AB\,\frac{\text{Cosin. } BAB'}{\sin. tot.} = -AB\,\frac{\text{Cosin. } A}{\sin. tot.} \\ B'C' = Bp = BC\,\frac{\text{Cosin. } CBp}{\sin. tot.} = -BC\,\frac{\text{Cosin.}(A+B)}{\sin. tot.} \end{matrix}\right\} (\S 42.)$$

$$C'D' = Dq = CD\,\frac{\text{Cosin. } CDq}{\sin. tot.} = -CD\,\frac{\text{Cosin.}(A+B+C)}{\sin. tot.}\ (\S 115.)$$

Die Perpendikel BB', CC', DD' werden auf die oben gezeigte Art gefunden. Mithin kann man den Inhalt des Dreyeks BAB' und der Trapezien B'C, CD' berechnen. Des Dreyeks EDD' Inhalt ist $= D'D^2 \frac{\text{Cotg. E}}{2\sin\text{ tot.}}$ (§. 105.). Also der Inhalt des Fünfeks

$$= \frac{AB' \times BB' + B'C'(BB' + CC') + C'D'(CC' + DD')}{2} - \frac{D'D^2 \text{Cotg. E}}{2\sin\text{. tot.}}$$

4.) Die andere unbekannte Seite AE ist auch $= AD' - D'E = AB' + B'C' + C'D' - DD' \frac{\text{Cotg. E}}{\sin\text{ tot.}}$. Diese Seite kann also mittelst derselben Logarithmen berechnet werden, welche man zur Berechnung des Inhalts des Fünfeks gebraucht.

5.) Die äusseren Winkel des Fünfeks werden gefunden, wenn man die Winkel am Umfang von zwey rechten oder von 180° abzieht. Wird diese Regel auf eine Figur, welche einwarts gehende Winkel hat, angewendet: so wird der einem einwarts gehenden Winkel entsprechende äussere Winkel negativ (§. 42.). Und diese Aenderung allein darf mit den vorhergehenden Ausdrüken der unbekannten Seiten vorgenommen werden, um sie solchen Figuren anzupassen, welche einwarts gehende oder convexe Winkel haben. (S. L' Huilier Polygonométrie. §. XXIII.)

6.) Durch Fortsezung der Schlüsse in n. 1. lassen sich zwey aneinander liegende Seiten und der Inhalt eines Vieleks berechnen, dessen übrige Seiten und die Winkel gegeben sind. Aus einer der zwey Eken der Figur, in welchen eine gegebene mit einer unbekannten Seite zusammenstoßt, werden an die Endpunkte der gegebenen Seiten Diagonalen gezogen, und dadurch das Vierek in Dreyecke zerlegt, die nach §. 81. aufgelößt werden, das lezte ausgenommen, dessen zwey unbekannte Seiten, welche zugleich Seiten des Vieleks sind, nach §. 18. gefunden werden. Ebenso läßt sich die in n. 3. gezeigte Berechnungsart auf jedes Vielek anwenden, dessen aneinander liegende Seiten weniger zwey und die Winkel gegeben sind. (S. L' Huilier Polygonométrie. §. XLVIII.)

Anwendung dieſer Methode auf das vorhergehende Beyſpiel. S. 304.

Man findet die äuſſeren Winkel A = 95° 0'
B = 47 50
C = 80 20
D = 65 52
289 2
359 60
folglich E = 70 58
A+B = 142 50
A+B+C = 223 10

Alſo $DE = \frac{AB \sin. 95° + BC \sin. (142° 50') + CD \sin. (223° 10')}{\sin. (70° 58')}$

$= (AB \sin. 85° + BC \sin. (37° 10') - CD \sin. (43° 10')) \frac{\text{Cosec.}(70° 58')}{\sin. tot.^2}$

Lg. AB = 2,5682017
Lg. sin. 85° = 9,9983442
Lg. Cosec. (70° 58') = 10,0244170
2,5909629; 389,90874.

Lg. BC = 2,6232493
Lg. sin. (37° 10') = 9,7811344
Lg. Cosec. (70° 58') = 10,0244170
2,4288007; 268,41123

658,31997

Lg. CD = 2,5440680
Lg. sin. (43° 10') = 9,8351341
Lg. Cosec. (70° 58') = 10,0244170
2,4036191; 253,29067

DE = 405,02930

$Lg. AB \frac{\sin. 85°}{\sin. tot.}$ = 2,5665459; BB' = 368,59203
$Lg. BC \frac{\sin. (37° 10')}{\sin. tot.}$ = 2,4043837; Cp = 253,73696
$Lg. CD \frac{\sin. (43° 10')}{\sin. tot.}$ = 2,3792021; Cq = 239,44298
CC' = 622,32899
DD' = 382,88691
BB'+CC' = 990,92102
CC'+DD' = 1005,21500

$$AB' = -AB\frac{\text{Cosin. } 95^\circ}{\text{sin. tot.}} = AB\frac{\text{Cosin. } 85^\circ}{\text{sin. tot.}}$$

$$B'C' = -BC\frac{\text{Cosin. } (142^\circ 50')}{\text{sin. tot.}} = BC\frac{\text{Cosin. } (37^\circ 10')}{\text{sin. tot.}}$$

$$C'D' = -CD\frac{\text{Cosin. } (223^\circ 10')}{\text{sin. tot.}} = CD\frac{\text{Cosin. } (43^\circ 10')}{\text{sin. tot.}}$$

Lg. BB' =	2,5665459	
Lg. AB =	2,5682017	
Lg. Cosin. 85° =	8,9402960	
	4,0750436;	2ΔABB' = 11886,22
Lg. (BB'+CC') =	2,9960390	
Lg. BC =	2,6232493	
Lg. Cos. (37° 10') =	9,9013938	
	5,5206821;	2Trap. B'C = 331651,60
Lg. (CC'+DD') =	3,0022590	
Lg. CD =	2,5440680	
Lg. Cos. (43° 10') =	9,8629460	
	5,4092730;	2Trap. CD' = 256609,64
		600147,46
Lg. DD' =	2,5830695	
2. Lg. DD' =	5,1661390	
Lg. Cotg. E =	9,5377920	
	4,7039310;	2ΔEDD' = 50574,44
		2) 549573,02
	Inhalt des Fünfecks =	274786,51 □F.

$\text{Lg. } AB\frac{\text{Cosin. } 85^\circ}{\text{sin. tot.}}$ =	1,5084977;	AB' = 32,24763 F.
$\text{Lg. } BC\frac{\text{Cos. } (37^\circ 10')}{\text{sin. tot.}}$ =	2,5246431;	B'C' = 334,69031
$\text{Lg. } CD\frac{\text{Cos. } (43^\circ 10')}{\text{sin. tot.}}$ =	2,4070140;	C'D' = 255,27835
		AD' = 622,21629
$\text{Lg. } DD'\frac{\text{Cotg. } E}{\text{sin. tot.}}$ =	2,1208615;	D'E = 132,08739
		AE = 490,12890

§. 122.

Die Conſtruktionen des vorhergehenden §. dienen auch zur Auflöſung des Falls, wo vier aneinander liegende Seiten EA, AB, BC, CD des Fünfeks (*Fig.* 69. 70.), und die dazwiſchen begriffene Winkel EAB, ABC, BCD gegeben ſind.

1.) Werden (*Fig.* 69.) die Diagonalen AC, AD gezogen: ſo laſſen ſich dieſe, und die Winkel, welche ſie unter ſich und mit den Seiten der Figur machen, nach §. 121. n. 1. berechnen. Alsdenn kennt man die zwey Seiten AD, AE des Dreyeks ADE, und den dazwiſchen begriffenen Winkel $EAD = EAB - (DAC + CAB)$; woraus die Seite DE und die Winkel AED, ADE gefunden werden können (§. 81.). Lezterer zu dem Winkel ADC addirt giebt den Winkel CDE.

2.) die zweyte Conſtruktion (*Fig.* 70.) giebt folgende Anleitung zur unmittelbaren Beſtimmung des Winkels AED, und der Seite DE. Es iſt $\text{Tang. DED}' = \frac{DD' \sin. tot.}{D'E}$.

Aber (§. 121. n. 3.)

$$DD' = \frac{AB \sin. A + BC \sin.(A+B) + CD \sin.(A+B+C)}{\sin. tot.}$$

$$AD' = -\frac{AB \operatorname{Cosin}. A + BC \operatorname{Cos}.(A+B) + CD \operatorname{Cos}.(A+B+C)}{\sin. tot.}$$

mithin $\frac{AD' - AE}{D'E}$

$$= -\frac{AE \sin.tot. + AB \operatorname{Cosin}. A + BC \operatorname{Cos}.(A+B) + CD \operatorname{Cos}.(A+B+C)}{\sin. tot.}$$

folglich Tang. DED'

$$= -\frac{AB \sin. A + BC \sin.(A+B) + CD \sin.(A+B+C)}{AE \sin.tot. + AB \operatorname{Cos}. A + BC \operatorname{Cos}.(A+B) + CD \operatorname{Cos}.(A+B+C)} \text{ s. t.}$$

oder (§. 93.) Tang. AED

$$= \frac{AB \sin. A + BC \sin.(A+B) + CD \sin.(A+B+C)}{AE \sin.tot. + AB \operatorname{Cos}. A + BC \operatorname{Cos}.(A+B) + CD \operatorname{Cos}.(A+B+C)} \text{ s. t.}$$

Die Seite DE iſt $= \sqrt{\overline{D'D}^2 + \overline{DE}^2}$ (I. 47.): oder, wenn der Winkel E ſchon gefunden iſt,

$$= \frac{DD' \sin. tot.}{\sin. E} = \frac{DD' \operatorname{Cosec}. E}{\sin. tot.} \quad (\text{§. 19. u. 105.})$$

3.) Der Flächeninhalt ergiebt sich aus den Dreyeken ABC, CAD, ADE (*Fig.* 69.) nach §. 75: oder aus den Dreyeken ABB' (*Fig.* 70.), DED', und den Trapezien B'C, CD'; wo AB', B'C', C'D', BB', CC', DD', nach §. 121. n. 3. berechnet werden.

4.) Beyde Berechnungsarten lassen sich auf jedes Vielek ausdehnen, dessen Seiten weniger eine, und die dazwischen begriffene Winkel gegeben sind. Aus der zweyten Construktion ergeben sich allgemeine Ausdrüke der Tangenten der zwey äusseren unbekannten Winkel des Vieleks (S. L'Huilier Polygonométrie §. XXVII.). Die allgemeine Bestimmung des Inhalts betreffend S. §. VIII. der angeführten Schrift.

Beyspiel.

Es seyen EA = 540 F. u. die äusseren Winkel A = 98°
AB = 416 B = 50
BC = 468 C = 78
CD = 396
also A+B = 148
A+B+C = 226

$$\text{so ist Tg.E} = \frac{AB \sin. 98° + BC \sin. 148° + CD \sin. 226°}{AE \sin. tot. + AB \cos. 98° + BC \cos. 148° + CD \cos. 226°} \text{ s.t.}$$

$$= \frac{AB \sin. 82° + BC \sin. 32° - CD \sin. 46°}{-AE \sin. tot. + AB \cos. 82° + BC \cos. 32° + CD \cos. 46°} \text{ s.t.}$$

Lg. AB = 2,6190933
Lg. sin. 82 = 9,9957528
Lg. Cos. 82 = 9,1435553
2,6148461 ; BB' = 411,95151 Fuß.
1,7626486 ; AB' = 57,89600

Lg. BC = 2,6702459
Lg. sin. 32 = 9,7242097
Lg. Cos. 32 = 9,9284205
2,3944556 ; Cp = 248,00223
2,5986664 ; B'C' = 396,88655
CC' = 659,95374
AC' = 454,78255

Lg. CD =	2,5976952	CC' =	659,95374
Lg. sin. 46 =	9,8569341	AC' =	454,78255
Lg. Cos. 46 =	9,8417713		
	2,4546293;	Cq =	284,85856
	2,4394665;	C'D' =	275,08475
		DD' =	375,09518
		AD' =	729,86730
Lg. DD' s. t. =	12,5741415	AE =	540
Lg. D'E =	2,2784502	D'E =	189,86730
Lg. Tg. E =	10,2956913;	E =	63° 9' 7",85
Lg. sin. E =	9,9504667	A+B+C =	226
Lg. DE =	2,6236748		289 9 7,85
DE =	420,41174 F.		359 59 60,
		D =	70 50 52,15

Zur unmittelbaren Berechnung des äusseren Winkels D hat man

$$\text{Tg.D} = -\frac{\text{BC sin. C} + \text{AB sin. (C+B)} + \text{AE sin. (C+B+A)}}{\text{CD s. t.} + \text{BC Cos. C} + \text{AB Cos. (C+B)} + \text{AE Cos. (C+B+A)}} \text{ s. t.}$$

$$= \frac{\text{BC sin. } 78^\circ + \text{AB sin. } 52^\circ - \text{AE sin. } 46^\circ}{\text{CD sin. tot.} - \text{BC Cos. } 78^\circ + \text{AB Cos. } 52^\circ + \text{AE Cos. } 46^\circ} \text{ sin. tot.}$$

$$= \frac{457,77316 + 327,81241 - 388,44360}{-396 - 97,30267 + 256,11521 + 375,11560} \text{ sin. tot.}$$

$$= \frac{397,14197}{137,92814} \text{ sin. tot.}$$

und hieraus mittelst der Logarithmen

Lg. Tg. D = 10,4592930; D = 70° 50' 52",06

Berechnung des Inhalts.

BB' =	411,95151 Fuß.
DD' =	375,09518
CC' =	659,95374
BB'+CC' =	1071,90525
CC'+DD' =	1035,04892

Lg. BB' = 2,6148461
Lg. AB' = 1,7626486
4,3774947; 2ΔABB' = 23850,35 Qf.
Lg. (BB'+CC') = 3,0301564
Lg. B'C' = 2,5986664
5,6288228; 2. Trp. B'C = 425424,48
Lg. (CC'+DD') = 3,0149008
Lg. C'D' = 2,4394665
5,4544273; 2. Trp. CD' = 284726,08
734000,91
Lg. DD' = 2,5741415
Lg. D'E = 2,2784502
4,8525917; 2ΔDED' = 71218,31
2) 662782,60
Inhalt des Fünfeks = 331391,3 Qf.

5.) Ebendieſes Fünfek ſoll durch eine gerade, durch den gegebenen Punkt K (*Fig.* 70.) der Seite AE gehende, Linie KL ſo getheilt werden, daß die Theile AL, LE ſich verhalten wie die ihnen anliegende Segmente AK, KE der Seite AE.

Da der Punkt K gegeben iſt; ſo kennt man das Verhältniß von AK : KE; mithin auch das ihm gleich ſeyn ſollende Verhältniß von AL : LE. Hieraus findet ſich (El. V; 18.) AE : AK = der Inhalt der Figur : Inhalt des Stüks AL; welcher alſo, wenn der Inhalt des Fünfeks gefunden worden iſt, berechnet werden kann. Wird BK gezogen: ſo hat man den Inhalt des Dreyeks ABK = $\frac{1}{2}$BB' × AK; folglich auch den Inhalt des Dreyeks BKL = AL - ΔABK. Ferner iſt Tg. B'KB = $\frac{BB' \text{sin. tot.}}{B'K}$; wodurch der Winkel ABK = FAB - B'KB, alſo auch KBL = ABC - ABK bekannt wird. Die Seite BK findet man mittelſt der Winkels B'KB und der Seite BB' nach §. 19. Alsdenn iſt $\frac{BK \times BL \text{ sin. } KBL}{2 \text{ sin. tot.}}$ = ΔBKL (§. 75.): folglich BL = $\frac{2\Delta BKL \text{ sin. tot.}}{BK \text{ sin. } KBL}$

Es sey AK = 202,5 Fuß: so ist AK : AE = 202,5 : 540
= 3 : 8

folglich AL = $\frac{3}{8}$ vom Inhalt des Fünfeks = 124271,7375 Q. F.

Lg. BB' =	2,6143461	AK =	202,500 F.
Lg. $\frac{1}{2}$AK =	2,0053950	AB' =	57,896
Lg. B'K =	2,1601803	B'K =	144,604
Lg. ΔABK =	4,6202411;		124271,7375 Qf.
Lg. Tg. B'KB =	10,4546658;	ΔABK =	41710,0865
Lg. sin. B'KB =	9,9747683	ΔBKL =	82561,6510
Lg. BK =	2,6400778	2. ΔBKL =	165123,302
Lg. sin. KBL =	9,9893146	B'KB =	70° 39' 28",11
	2,6293924	FAB =	98 0 0
Lg. 2ΔBKL =	5,2178084	ABK =	27 20 31,89
Lg. BL =	2,5884160	ABC =	130 0 0
		KBL =	102 39 28,11
		BL =	387,62875 Fuß.
		BC =	468,
		CL =	80,37125

Zur Probe für die Richtigkeit der Theilung kann das andere Stük LE auf folgende Art berechnet werden. Ein Perpendikel LL' von L auf AE schneide die mit AE Parallele Bp in dem Punkt r. In dem bey r rechtwinklichten Dreyek BLr kennt man die Hypotenuse BL, und den Winkel LBr = EAc = 2R - (A + B) = 32°. Hieraus findet man $Lr = \frac{BL \sin. 32°}{\sin. tot.}$, $Br = \frac{BL \text{ Cosin. } 32°}{\sin. tot.}$: also auch BB' + Lr = L'r + Lr = LL'; B'C' - Br = B'C' - B'L' = L'C'; Br - B'K = B'L' - B'K = KL'. Demnach kann man den Inhalt des Dreyeks KLL' und des Trapezium L'C berechnen. Ueberdiß ist der Inhalt des Trapezium CD' und des Dreyeks DED' oben bey der Berechnung des Inhalts der Figur schon gefunden: mithin hat man LE = ΔKLL' + Trap. L'C + Trap. CD' - ΔDED'.

			F.
Lg. BL =	2,5884160		
Lg. sin. 32° =	9,7242097;	BB' =	411,95151
Lg. Cosin. 32° =	9,9284205;	B'C' =	396,88655
	2,3126251;	Lr =	205,41193
	2,5168365;	Br =	328,72788
Lg. KL' =	2,2651101	LL' =	617,36344
Lg. LL' =	2,7905409	L'C' =	68,15867
Lg. 2ΔKLL' =	5,0556510	B'K =	144,60400
Lg.(CC'+LL') =	3,1062987	KL' =	184,12388
Lg. L'C' =	1,8335211	CC' =	659,95374
Lg. 2Trap. LC' =	4,9398198;	CC'+LL' =	1277,31718
		2ΔKLL' =	113671,335Qf.
		2. Trap. LC' =	87060,220
		2 Trap. CD' =	284726,08
			485457,635
		2ΔDED' =	71218,31
		2)	414239,325
		Inhalt des Theils LE =	207119,6625
		AL =	124271,7375
		Inhalt des Fünfeks =	331391,4000

nur um 0,1 Quadratfuß zu groß.

§. 123.

In dem Sechsek ABCDEF (*Fig.* 71.) sind eine Seite AB, und die Winkel gegeben, welche die an dieser Seite anliegenden Seiten CB, FA, und die von ihren Endpunkten A, B aus gezogenen Diagonalen mit ihr einschließen: man soll die übrigen Seiten, die Winkel am Umfang, und den Inhalt des Sechseks berechnen.

In jedem der Dreyeke ACB, ADB, AEB, AFB kennt man eine Seite AB, und die ihr anliegenden Winkel; mithin können die Seiten BC, AF, und die von den Endpunkten der Seite AB aus gezogenen Diagonalen nach §. 18. berechnet werden. Hieraus ergeben sich ferner die Seiten

CD, DE, EF nach §. 76. oder, wenn man auch die Winkel am Umfang verlangt nach §. 84. und 18. Leztere ergeben sich aus den Winkeln der Dreyeke BCA, DCA, u. s. w. nämlich BCD = BCA + ACD, CDE = CDA + ADE, u. s. w. Der Inhalt des Sechseks ist gleich der Summe der Dreyeke ABC, ACD, ADE, AEF; deren ersteres nach §. 18. leztere nach §. 75. berechnet werden. Ebenso läßt sich der Inhalt des Sechseks aus denjenigen Dreyeken herleiten, welche B zur gemeinschaftlichen Spize haben; in welchem Fall er dem Ueberschuß der Summe der Dreyeke ABF, FBE, EBD, über das Dreyek CBD gleich wird.

Beyspiel. *Fig.* 71.

Es seyen AB = 320 Fuß.

BAF =	90°50'	ABF =	25°30'
BAE =	73 50	ABE =	50 15
BAD =	32 20	ABD =	93 30
BAC =	22 40	ABC =	54 36

Lg. AB =	2,5051500	ΔABC
Lg. sin. C =	9,9891856	C = 102° 44'
	2,5159644	
Lg. sin. A =	9,5858771	A = 22 40
Lg. sin. B =	9,9112257	B = 54 36
Lg. BC =	2,1018415;	BC = 126,427
Lg. AC =	2,4271901;	AC = 267,418
Lg. AB =	2,5051500	ΔABD
Lg. sin. D =	9,9088727	D = 54° 10'
	2,5962773	
Lg. sin. A =	9,7282271	A = 32 20
Lg. sin. B =	9,9991892	B = 93 30
Lg. BD =	2,3245044;	BD = 211,108
Lg. AD =	2,5954065;	AD = 393,973

Lg. AB =	2,5051500
Lg. sin. E =	9,9181475
	2,5870025
Lg. sin. A =	9,9824774
Lg. sin. B =	9,8858370
Lg. BE =	2,5694799;
Lg. AE =	2,4728395;
Lg. AB =	2,5051500
Lg. sin. F =	9,9524188
	2,5527312
Lg. sin. A =	9,9999541
Lg. sin. B =	9,6339844
Lg. BF =	2,5526853;
Lg. AF =	2,1867156;
Lg. AD =	2,5954665
Lg. AC =	2,4271901
Lg. Tg. φ =	10,1682764
Lg. Tg. (φ-450) =	9,2818225
Lg. Tg. $\frac{C+D}{2}$ =	11,0728440
Lg. Tg. $\frac{C-D}{2}$ =	10,3546665;
Lg. AD =	2,5954665
Lg. sin. C =	9,6810895
	2,9143770
Lg. sin. D =	9,5128131
Lg. sin. A =	9,2250918
Lg. AC =	2,4271901
Lg. CD =	2,1394688;
Lg. AD =	2,5954665
Lg. AE =	2,4728395
Lg. Tg. φ =	10,1226270
Lg. Tg. (φ 45°) =	9,1468997
Lg. Tg. $\frac{E+D}{2}$ =	10,4215142
Lg. Tg. $\frac{E-D}{2}$ =	9,5684139

ΔABE	
E =	55°55'
A =	73 50
B =	50 15
BE =	371,090
AE =	297,057
ΔABF	
F =	63°40'
A =	90 50
B =	25 30
BF =	357,014
AF =	153,715
ΔCAD	
BAD =	32°20'
BAC =	22 40
CAD =	9 40
	179 60
	170 20
$\frac{C+D}{2}$ =	85 10
φ =	55 49 56",84
φ-45° =	10 49 56,84
$\frac{C-D}{2}$ =	66 9 32
C =	151 19 32
D =	19 0 28
ACB =	102 44 0
BCD =	254 3 32
CD =	137,8696
ΔDAE	
BAE =	73°50'
BAD =	32 20
DAE =	41 30
	179 60
	138 30
$\frac{E+D}{2}$ =	69 15
φ =	52 59 0",97
φ-45° =	7 59 0,97

Lg. AD =	2,5954665	$\frac{E-D}{2}$ =	20 18 48,9
Lg. sin. E =	9,9999874	E =	89 33 48,9
	2,5954791	D =	48 56 11,1
Lg. sin. D =	9,8773604	ADC =	19 0 28
Lg. sin. A =	9,8212646	CDE =	67 56 39,1
Lg. AE =	2,4728395	DE =	261,0620
Lg. DE =	2,4167437;	ΔEAF	
Lg. AE =	2,4728395	BAF =	90°50'
Lg. AF =	2,1867156	BAE =	73 50
Lg. Tg. φ =	10,2861239	EAF =	17 0
Lg. Tg. (φ-45°) =	9,5024169		180
Lg. Tg. $\frac{F+E}{2}$ =	10,8255012		163 0
Lg. Tg. $\frac{F-E}{2}$ =	10,3279181.5	$\frac{F+E}{2}$ =	81 30
Lg. AE =	2,4728395	φ =	62 38 25"
Lg. sin. F =	9,7438610	φ-45° =	17 38 25
	2,7289785	$\frac{F-E}{2}$ =	64 49 38,23
Lg. sin. E =	9,4577371	F =	146 19 38,23
Lg. sin. A =	9,4059353	E =	16 40 21,77
Lg. AF =	2,1867156	DEA =	89 33 48,9
Lg. EF =	2,1949138;	DEF =	106 14 10,67
		EF =	156,644

Berechnung des Inhalts.

Lg. AB =	2,5051500	
Lg. AC =	2,4271901	
Lg. sin. BAC =	9,5858771	
	4,5182172;	2ΔABC = 32977,46 Q. F.
Lg. AC =	2,4271901	
Lg. AD =	2,5954665	
Lg. sin. CAD =	9,2250918	
	4,2477484;	2ΔACD = 17690,84

Lg. AB =	2,5051500	ΔABE	
Lg. sin. E =	9,9181475	E =	55°55′
	2,5870025	A =	73 5 0
Lg. sin. A =	9,9824774	B =	50 15
Lg. sin. B =	9,8858370	BE =	371,090
Lg. BE =	2,5694799;	AE =	297,057
Lg. AE =	2,4728395;	ΔABF	
Lg. AB =	2,5051500	F =	63°40′
Lg. sin. F =	9,9524188	A =	90 50
	2,5527312	B =	25 30
Lg. sin. A =	9,9999541	BF =	357,014
Lg. sin. B =	9,6339844	AF =	153,715
Lg. BF =	2,5520853;	ΔCAD	
Lg. AF =	2,1867156;	BAD =	32°20′
Lg. AD =	2,5954665	BAC =	22 40
Lg. AC =	2,4271901	CAD =	9 40
Lg. Tg. φ =	10,1682764		179 60
Lg. Tg.(φ-450) =	9,2818225		170 20
Lg. Tg. $\frac{C+D}{2}$ =	11,0778440	$\frac{C+D}{2}$ =	85 10
Lg. Tg. $\frac{C-D}{2}$ =	10,3546665;	φ =	55 49 56″,84
Lg. AD =	2,5954665	φ-45° =	10 49 56,84
Lg. sin. C =	9,6810805	$\frac{C-D}{2}$ =	66 9 32
	2,9143770	C =	151 19 32
Lg. sin. D =	9,5128131	D =	19 0 28
Lg. sin. A =	9,2250918	ACB =	102 44 0
Lg. AC =	2,4271901	BCD =	254 3 32
Lg. CD =	2,1394688;	CD =	137,8696
Lg. AD =	2,5954665	ΔDAE	
Lg. AE =	2,4728395	BAE =	73°50′
Lg. Tg. φ =	10,1226270	BAD =	32 20
Lg. Tg.(φ 45°) =	9,1408997	DAE =	41 30
Lg. Tg. $\frac{E+D}{2}$ =	10,4215142		179 60
Lg. Tg. $\frac{E-D}{2}$ =	9,5684139		138 30
		$\frac{E+D}{2}$ =	69 15
		φ =	52 59 0″,97
		φ-45° =	7 59 0,97

Lg. AB = 2,5051500 ΔABK
Lg. sin. K = 9,9997082; K = 92° 6'
2,5054418
Lg. sin. A = 9,8803970; A = 49 24
Lg. sin. B = 9,7941496; ΔKAE; B = 38 30
Lg. BK = 2,3858388; BAE = 73 50
Lg. AK = 2,2995914; BAK = 49 24
Lg. AE = 2,4728395; KAE = 24 26
Lg. sin. KAE = 9,6166164
4,3890473; 2ΔKAE = 24493,30 Q.F.
2ΔAEF = 13350,28
2Viereck AFEK = 37843,58
2AFEKG = 47188,86
2ΔAKG = 9345,28

$\frac{AG \times AK \sin. GAK}{\sin. tot.} = 2\Delta AKG$ (§. 75.)

$AG = \frac{2\Delta AKG \sin. tot.}{AK \sin. GAK}$

Lg. 2ΔAKG = 3,9705924
Lg. AK = 2,2995914
Lg. sin. GAK = 9,8803970
Lg. $\frac{AK \sin. GAK}{\sin. tot.}$ = 2,1799884
Lg. AG = 1,7906040; AG = 61,7453 F.
Lg. AB = 2,5051500
4,6851384; 2ΔABK = 48432,68 Q.F.
2ΔAKG = 9345,28
2ΔBKG = 39087,40
2GKHCB = 53930,12
2ΔKBh = 14842,72

$\frac{Bh \times BK \sin. CBK}{\sin. tot.} = 2\Delta KBh$

$Bh = \frac{2\Delta KBh \sin. tot.}{BK \sin. CBK}$

Lg. 2ΔKBh =	4,1715135	ABC =	54°36'
Lg. BK =	2,3858388	ABK =	38 30
Lg. sin. CBK =	9,4429728;	CBK =	16 6
	1,8288116	BC =	126,42747 F.
Lg. Bh =	2,3427019;	Bh =	220,14145
		Ch =	93,71398

Nun muß das Dreyek ChK dem Dreyek CHK gleich seyn; folglich muß seyn

$$\frac{CH \times CK \sin. HCK}{2 \sin. tot.} = \frac{Ch \times CK \sin. hCK}{2 \sin. tot.} \text{ (§. 75.)}$$

mithin $CH = \frac{Ch \sin. hCK}{\sin. HCK} = \frac{Ch \sin. BCK}{\sin. DCK}$

Zur Bestimmung des Theilungspunkts H wird also noch die Auflösung des Dreyeks CBK erfordert.

Lg. BK =	2,3858388	ΔCBK		
Lg. BC =	2,1018415	ABC =	54°36'	
Lg. Tg. φ =	10,2839973;	ABK =	38 30	
Lg. Tg. (φ-45°) =	9,4993985	CBK =	16 6	
Lg. Tg. $\frac{C+K}{2}$ =	10,8494559		179 60	
Lg. Tg. $\frac{C-K}{2}$ =	10,3488544		163 54	
Lg. Ch =	1,9718044	$\frac{C+K}{2}$ =	81 57	
Lg. sin. BCK =	9,7263357	φ =	62 31 32",17	
	11,6981401	φ-45° =	17 31 32,17	
Lg. sin. DCK =	9,9823275	$\frac{C-K}{2}$ =	65 52 26,9	
Lg. CH =	1,7158126;	C =	147 49 26,9	
		K =	16 4 33,1	
		BCD =	254 3 32,0	
		DCK =	106 14 5,1	
		CH =	51,97717 F.	

Noch hätte der Theilungspunkt H auf folgende Art bestimmt werden können. Aus den schon berechneten Seiten BD, BE, BK, und den dazwischen begriffenen Winkeln erhält man nach §. 75.

$2\Delta DBE = 53677{,}33$ Q. F.
$2\Delta EBK = 18373{,}22$
2 Vierek $BDEK = 72050{,}55$
$2\Delta DBK = 42044{,}36$
$2\Delta DEK = 30006{,}19$
Aber 2 Vierek $DEKH = 40447{,}60$
folglich $2\Delta DKH = 10441{,}41$

Löst man jezt das Dreyek BDK auf: so findet sich $DBK = 55°0'$, $BDK = 70° 12' 44'',1$, $BKD = 54°47' 15'',9$, und Lg. $DK = 2{,}3256353$. Nun kennt man den Winkel $DCh =$ conv. W. $BCD - 2R = 74° 3' 32''$, und den Winkel $CBD = ABD - ABC = 38° 54'$; mithin auch $CDB = DCh - CBD\ (I, 32.) = 35° 9' 32''$, und $CDK = BDK - CDB = 35° 3' 12'',1$. Endlich muß seyn $DH \times DK \frac{\sin. CDK}{\sin. tot.} = 2\Delta DKH = 10441{,}41$ Q. Fuß: woraus sich ergibt, $DH = 85{,}89252$ F.; folgl. $CH = CD - DH = 137{,}86968 - 85{,}89252 = 51{,}97716$, sehr nahe wie vorhin.

1. Zusaz. Diese Aufgabe kommt in der praktischen Geometrie vor, wenn aus einer Standlinie eine Figur aufgenommen werden soll, und diese Standlinie zugleich eine Seite der Figur ist. Wenn die Standlinie ausserhalb der Figur liegt, z. B. mittelst der Standlinie AB das Vierek DCKE berechnet werden soll: so können wie vorhin die Seiten DC, CK, KE, DE des Viereks aus den Seiten DB, CB; CB, KB u. s. w. und den dazwischen begriffenen Winkeln berechnet werden. Der Inhalt des Viereks ist gleich dem Ueberschuß der Summe der Dreyeke DBE, KBE über die Summe der Dreyeke DBC, KBC, oder $= \Delta ACD + \Delta AED - (\Delta ACK + \Delta AEK)$, deren Inhalt sich nach §. 75. finden läßt. Aus obigen Bestimmungsstüken erhält man

$2\Delta EBK = 18373{,}22$ Q. F.
$2\Delta DBE = 53677{,}33$
$72050{,}55$
$2\Delta DBC = 10760{,}23$
$2\Delta KBC = 8524{,}19$
$25284{,}42$
2 Vierek $DCKE = 46766{,}13$
$DCKE = 23383{,}065$

Durch Auflösung der Dreyeke DEA, KEA erhält man ferner DE = 261,062 Fuß, EK = 141,9684, DEA = 89° 33' 48",9, KEA = 35° 30' 21"; mithin DEK = DEA - KEA = 54° 3' 27",9. Ebenso findet man CK = 126,6123, CD = 137,8697, und die übrigen Winkel am Umfang des Viereks, nämlich CKE = 131° 45' 47",9, DCK = 106° 14' 5",1, CDE = 67° 56' 39",1.

Auf ähnliche Art wird die Aufgabe aufgelöst, wenn die Standlinie innerhalb der Figur, oder zum Theil innerhalb, zum Theil ausserhalb derselben fällt.

2. Zusaz. Wenn statt der Seite AB, an deren Endpunkten die Spizen der gegebenen Winkel liegen, eine der übrigen ihr nicht anliegende Seite, z. B. DE gegeben wäre: so kann man die Seite AB nach §. 109. finden, wodurch diese Aufgabe auf die vorhergehende zurückgeführt wird.

§. 124.

Es sey bWT (*Fig.* 72.), WTR, TRH, RHD u. s. w. eine Reihe dergestalt aneinander hängender Dreyeke, daß jedes mit dem darauf folgenden eine Seite gemeinschaftlich habe. In dem ersten dieser Dreyeke bWT seyen eine Seite bT, und die Winkel; von allen übrigen aber die Winkel gegeben. Durch eine Spize T dieser Dreyeke sey eine gerade Linie NM unter einem gegebenen Winkel MTW mit einer Seite TW derselben gezogen. Man soll die Seiten dieser Dreyeke, die von den Spizen derselben auf die gerade Linie MN gefällten Perpendikel WW', RR', HH', u. s. w. und die Abstände TW', TR', TH', u. s. w. der Fußpunkte dieser Perpendikel von dem Punkt T berechnen.

Da man in dem Dreyek bWT eine Seite bT, und die Winkel kennt: so findet man nach §. 18. die Seiten bW, TW. Alsdenn kennt man in dem anliegenden Dreyek TWR eine Seite TW, und die Winkel; woraus sich die Seiten WR, TR berechnen lassen, u. s. w.

Aus der nun bekannten Seite TW, und dem Winkel WTM des rechtwinklichten Dreyeks WTW' ergibt sich

$$WW' = TW\frac{\text{sin. WTM}}{\text{sin. tot.}},\quad TW' = TW\frac{\text{Cosin. WTM}}{\text{sin. tot.}}$$

Ebenso findet man aus der Seite TR, und dem Winkel MTR = WTR - WTM

$$RR' = TR\frac{\text{sin. MTR}}{\text{sin. tot.}},\quad TR' = TR\frac{\text{Cosin. MTR}}{\text{sin. tot.}}$$

In dem rechtwinklichten Dreyek H'TH kennt man die Seite TH, und den Winkel H'TH = 2R — MTH = 2R — (MTR+RTH). Hieraus erhält man

$$HH' = TH\frac{\text{sin. H'TH}}{\text{sin. tot.}},\quad TH' = TH\frac{\text{Cosin. H'TH}}{\text{sin. tot.}}$$

Das verlängerte Perpendikel DD' schneide die mit MN durch R gezogene Parallele Rr in dem Punkt r: so ist DRr = TRr + DRT = MTR + DRH - TRH (I, 29.); alsdenn

$$Dr = DR\frac{\text{sin. DRr}}{\text{sin. tot.}};\quad Rr = DR\frac{\text{Cosin. DRr}}{\text{sin. tot.}}$$

folglich $DD' = Dr - D'r = Dr - RR'$

$TD' = R'D' - R'T = Rr - R'T$

Oder: wenn die verlängerte DD' die mit MN Parallele Hh in d schneidet; so ist DHd = THd — THD = MTH - (RHD - RHT) = MTR + RTH - RHD + RHT,

und $Dd = DH\frac{\text{sin. DHd}}{\text{sin. tot.}},\quad Hd = DH\frac{\text{Cosin. DHd}}{\text{sin. tot.}}$

also $DD' = Dd - D'd = Dd - HH'$

$TD' = TH' + H'D' = TH' + Hd$

Auf ähnliche Art werden die übrigen Perpendikel, und die Abstände ihrer Fußpunkte von dem Punkt T berechnet.

Beyspiel.

Die 72ste Figur bezieht sich auf wirkliche Messungen. Der Punkt T ist die Sternwarte in Tübingen. b der westliche Endpunkt einer in dem Ammerthale gemessenen Grundlinie. Ein an dem östlichen Endpunkt der Grundlinie anlie-

gendes Stük derselben machte die Grundlinie eines kleinen Dreyeks, dessen Spize die Sternwarte war; wodurch der Abstand des östlichen Endpunkts von dem Mittelpunkt der Sternwarte berechnet werden konnte. Aus dieser Linie und der gemessenen Grundlinie ergab sich mittelst des dazwischen begriffenen Winkels der Abstand Tb = 16308,577 Pariser Fuß = 2713,096166... Tois.

Ferner wurden folgende Winkel gemessen, welchen zugleich die Namen der in *Fig.* 72. nur mit ihren Anfangsbuchstaben bezeichneten Orte beygeschrieben sind.

	Tübingen	41°	26′	26″	T
ΔTbW	b	114	18	51	b
	Weilerburg	24	14	43	W
	Weilerburg	53	8	44	W
ΔTWR	Tübingen	81	28	30	T
	Roßberg	45	22	46	R
	Tübingen	68	6	18	T
ΔTRH	Hohenneifen	30	42	52	H
	Roßberg	81	10	50	R
	Roßberg	92	11	2	R
ΔRHD	Hohenneiffen	54	9	36	H
	Dekenpfronb	33	39	22	D
	Hohenneiffen	34	5	21	H
ΔDHS	Dekenpfronb	52	18	9	D
	Solitude	93	36	30	S
	Hohenneiffen	45	34	0	H
ΔSHB	Solitude	60	21	31	S
	Buoch	74	4	29	B
	Solitude	45	34	15	S
ΔSBL	Buoch	34	18	30	B
	Ludwigsburg	100	7	15	L

IN ist die Mittagslinie durch die Sternwarte, M die Mittagsseite, und der Winkel MTW = 50° 26′ 27″.

Aus der nun bekannten Seite TW, und dem Winkel WTM des rechtwinklichten Dreyeks WTW' ergibt sich

$$WW' = TW\frac{\text{sin. WTM}}{\text{sin. tot.}},\quad TW' = TW\frac{\text{Cosin. WTM}}{\text{sin. tot.}}$$

Ebenso findet man aus der Seite TR, und dem Winkel MTR = WTR - WTM

$$RR' = TR\frac{\text{sin. MTR}}{\text{sin. tot.}},\quad TR' = TR\frac{\text{Cosin. MTR}}{\text{sin. tot.}}$$

In dem rechtwinklichten Dreyek H'TH kennt man die Seite TH, und den Winkel H'TH = 2R — MTH = 2R — (MTR+RTH). Hieraus erhält man

$$HH' = TH\frac{\text{sin. H'TH}}{\text{sin. tot.}},\quad TH' = TH\frac{\text{Cosin. H'TH}}{\text{sin. tot.}}$$

Das verlängerte Perpendikel DD' schneide die mit MN durch R gezogene Parallele Rr in dem Punkt r: so ist DRr = TRr + DRT = MTR + DRH - TRH (I, 29.); alsdenn

$$Dr = DR\frac{\text{sin. DRr}}{\text{sin. tot.}};\quad Rr = DR\frac{\text{Cosin. DRr}}{\text{sin. tot.}}$$

folglich $DD' = Dr - D'r = Dr - RR'$

$TD' = R'D' - R'T = Rr - R'T$

Oder: wenn die verlängerte DD' die mit MN Parallele Hh in d schneidet; so ist DHd = THd — THD = MTH - (RHD - RHT) = MTR + RTH - RHD + RHT,

und $Dd = DH\frac{\text{sin. DHd}}{\text{sin. tot.}},\quad Hd = DH\frac{\text{Cosin. DHd}}{\text{sin. tot.}}$

also $DD' = Dd - D'd = Dd - HH'$

$TD' = TH' + H'D' = TH' + Hd$

Auf ähnliche Art werden die übrigen Perpendikel, und die Abstände ihrer Fußpunkte von dem Punkt T berechnet.

Beyspiel.

Die 72ste Figur bezieht sich auf wirkliche Messungen. Der Punkt T ist die Sternwarte in Tübingen. b der westliche Endpunkt einer in dem Ammerthale gemessenen Grundlinie. Ein an dem östlichen Endpunkt der Grundlinie anlie-

gendes Stük derselben machte die Grundlinie eines kleinen Dreyeks, dessen Spize die Sternwarte war; wodurch der Abstand des östlichen Endpunkts von dem Mittelpunkt der Sternwarte berechnet werden konnte. Aus dieser Linie und der gemessenen Grundlinie ergab sich mittelst des dazwischen begriffenen Winkels der Abstand Tb = 16308,577 Pariser Fuß = 2718,096166... Tois.

Ferner wurden folgende Winkel gemessen, welchen zugleich die Namen der in *Fig.* 72. nur mit ihren Anfangsbuchstaben bezeichneten Orte beygeschrieben sind.

	Tübingen	41°	26'	26"	T
ΔTbW	b	114	18	51	b
	Weilerburg	24	14	43	W
	Weilerburg	53	8	44	W
ΔTWR	Tübingen	81	28	30	T
	Roßberg	45	22	46	R
	Tübingen	68	6	18	T
ΔTRH	Hohenneifen	30	42	52	H
	Roßberg	81	10	50	R
	Roßberg	92	11	2	R
ΔRHD	Hohenneiffen	54	9	36	H
	Dekenpfronb	33	39	22	D
	Hohenneiffen	34	5	21	H
ΔDHS	Dekenpfronb	52	18	9	D
	Solitude	93	36	30	S
	Hohenneiffen	45	34	0	H
ΔSHB	Solitude	60	21	31	S
	Buoch	74	4	29	B
	Solitude	45	34	15	S
ΔSBL	Buoch	34	18	30	B
	Ludwigsburg	100	7	15	L

IN ist die Mittagslinie durch die Sternwarte, M die Mittagsseite, und der Winkel MTW = 50° 26' 27".

Berechnung der Seiten der Dreyeke.

Lg. Tb = 3,4342648;	Tb =	2718,096 Tois.
Lg. sin. W = 9,6134651;	W =	24° 14' 43
3,8207997		
Lg. sin. T = 9,8207547;	T =	41 26 26
Lg. sin. b = 9,9596640;	b =	114 18 51
Lg. bW = 3,6415544;	bW =	4380,80
Lg. TW = 3,7804631;	TW =	6032,033
Lg. sin. R = 9,8523422;	R =	45 22 46
3,9281215		
Lg. sin. T = 9,9951749;	T =	81 28 30
Lg. sin. W = 9,9031778;	W =	53 8 44
Lg. WR = 3,9232964;	WR =	8381,010
Lg. TR = 3,8312993;	TR =	6781,087
Lg. sin. H = 9,7082166;	H =	30 42 52
4,1230827;		
Lg. sin. R = 9,9948345;	R =	81 10 50
Lg. sin. T = 9,9674866;	T =	68 6 18
Lg. TH = 4,1179172;	TH =	13119,498
Lg. RH = 4,0905693;	RH =	12318,826
Lg. sin. D = 9,7436720;	D =	33° 39' 22"
4,3468973		
Lg. sin. H = 9,9088362;	H =	54 9 36
Lg. sin. R = 9,9996844;	R =	92 11 2
Lg. DR = 4,2557335;	DR =	18019,110
Lg. DH = 4,3465817;	DH =	22211,694
Lg. sin. S = 9,9991382;	S =	93 36 30
4,3474435		
Lg. sin. H = 9,7485620;	H =	34 5 21
Lg. sin. D = 9,8983139;	D =	52 18 9
Lg. DS = 4,0960055;	DS =	12473,996
Lg. HS = 4,2457574;	HS =	17609,919

Lg. HS = 4,2457574;		
Lg. sin. B = 9,9830036;	B =	74 4 29
4,2627538		
Lg. sin. S = 9,9390887;	S =	60 21 31
Lg. sin. H = 9,8537381;	H =	45 34 0
Lg. BH = 4,2018425;	BH =	15916,315
Lg. BS = 4,1164919;	BS =	13076,512
Lg. sin. L = 9,9931890;	L =	100 7 15
4,1233029		
Lg. sin. B = 9,7510066;	B =	34 18 30
Lg. sin. S = 9,8537690;	S =	45 34 15
Lg. SL = 3,8743095;	SL =	7487,029
Lg. BL = 3,9770719;	BL =	9485,755

Berechnung der Perpendikel.

Lg. TW = 3,7084637		
Lg. sin. MTW = 9,8870360;	MTW =	50°26' 27"
Lg. Cosin. MTW = 9,8040540		
3,5954997;	WW' =	3940,032 Tois.
3,5125177;	TW' =	3254,750
Lg. TR = 3,8312993;	WTR =	81°28' 30"
Lg. sin. MTR = 9,7122701	MTR =	31 2 3
Lg. Cosin. MTR = 9,9329099		
3,5435694;	RR' =	3495,984
3,7642092;	TR =	5810,443
	RTH =	68 6 18
	MTH =	99 8 21
		179 59 60
Lg. TH = 4,1179172		
Lg. sin. H'TH = 9,9944516;	H'TH =	80 51 39
Lg. Cosin. H'TH = 9,2009408		
4,1123688;	HH' =	12952,952
3,3188580;	TH' =	2083,810

DRH = 92° 11' 2"
HRT = 81 10 50
11 0 12
Lg. DR = 4,2557335
Lg. sin. DRr = 9,8258264
Lg. Cos. DRr = 9,8708173.5
4,0815599;
4,1265508.5;
RHD = 54 9 36
DHS = 34 5 21
RHS = 88 14 57
RHT = 30 42 52
57 32 5
Lg. HS = 4,2457574
Lg. sin. HSs = 9,8221577
Lg. Cos. HSs = 9,8737545
4,0679151;
4,1195119;
HH'-Hs = SS' = 1261,242
TH'+Ss = TS' = 15251,571
Lg. BH = 4,2018425
Lg. sin. BHh = 8,8394700
Lg. Cos. BHh = 9,9989607
3,0413125
4,2008032
Bh+HH' = BB' = 14052,749
Hh+TH' = TB' = 17962,081

MTR } = 31 2 3
TRr }
DRT = 11 0 12
DRr = 42 2 15
RR' = 3495,984
TR' = 5810,443
Dr = 12065,906
Rr = 13382,918
Dr-RR' } = 8569,922
DD' }
Rr-TR' } = 7572,475
TD' }
THS = 57 32 5
MTH } = 99 8 21
THd }
SHd } = 41 36 16
HSs }
HH' = 12952,952
TH' = 2083,810
Hs = 11691,710
Ss = 13167,761
SHh = 41 36 16
SHB = 45 34 0
BHh = 3 57 44
Bh = 1099,797
Hh = 15878,271
HH' = 12952,952
TH' = 2083,810

HBS = 74° 4' 29"
SBL = 34 18 30
HBL = 108 22 59
90°-BHh = HBl = 86 2 16
LBl = 22 20 43
Lg. BL = 3,9770719; TB' = 17962,081
Lg. sin. LBl = 9,5799975; BB' = 14052,749
Lg. Cos. LBl = 9,9660993; Ll = 3606,362
3,5570694; Bl = 8773,466
3,9431712; TL' = 21568,443
TB'+Ll = LL' = 5279,283
BB'-Bl =

Zur Geschichte der Auflösung der ebenen Dreyeke.

§. 125.

In dem Ptolemäischen Almageſt (§. 8. Note a) finden ſich nur trigonometriſche Berechnungen von Seiten und Winkeln ebener Dreyeke in beſtimmten auf aſtronomiſche Unterſuchungen ſich beziehenden Beyſpielen. Dabey werden die ſchiefwinklichten Dreyeke immer durch Fällung von Perpendikeln aus einer Spize derſelben auf ihre Gegenſeite in rechtwinklichte zerlegt: um dieſe aber jedesmal ein Kreis beſchrieben, und ihre Seiten auf doppelte Art, einmal nach Angabe der §. 8. 16. beſchriebenen Chordentafel, und wieder nach dem angegebenen Maaß derſelben, getheilt gedacht; wo mithin die Zahlen, welche die Längen zweyer Seiten nach beyden Eintheilungen angeben, proportional ſind.

Hier einige Beyſpiele dieſes Verfahrens.

1°. In des V Buchs 4 Cap. (p. 112. der griechiſchen Ausgabe) ſchließt Ptolemäus die Hypotenuſe AD des bey B rechtwinklichten Dreyeke ABD (*Fig.* 2.), deſſen Winkel BAD = 7°40′, und die Gegenſeite BD = $5\frac{1}{4}$ oder $5\frac{15}{60}$ gegeben ſind, folgendermaſſen: Da der Winkel BAD $\overline{7, 40'}$ ſolcher Theile iſt, dergleichen vier rechte Winkel $\overline{360}$ ſind; oder $\overline{15, 20'}$ ſolcher Theile, dergleichen zwey rechte Winkel $\overline{360}$ ſind: ſo iſt auch der Bogen BD $\overline{15, 20'}$ ſolcher Theile, dergleichen der um das Dreyek ABD beſchriebene Kreis $\overline{360}$ iſt; und ſo iſt deſſen Chorde BD zunächſt $\overline{10}$ ſolcher Theile, dergleichen des Kreiſes Durchmeſſer AD $\overline{120}$ iſt.

(Die Chorden v. 15° 30′ sind näml. in der 16 Th. 10 M. 56 S.
15 0 Ptolem. Tafel 15 39 47)
daher ist AD 39, 22′ solcher Theile, dergleichen BD 5, 15′ ist.

2°. In des II. B. 5. Cap. (p. 28.) folgert er die Seite BD des bey B rechtwinklichten Dreyeks ABD, dessen Seite AB = 60, und der Winkel BAD = 12° 8′ 40″ gegeben sind, so: Da der Winkel BAD 12, 8′ 40″ solcher Theile ist, dergleichen vier rechte Winkel 360 sind; aber 24, 17′ 20″ solcher, dergleichen zwey rechte Winkel 360 sind: so ist auch der Bogen BD des um das Dreyek ABD beschriebenen Kreises 24, 17′ 20″, und sein Ueberrest AKB zu dem Halbkreise 155, 42′ 40″ solcher Theile, dergleichen der Kreis 360 ist. Daher ist AB 117, 18′ 51″ solcher Theile, dergleichen BD 25, 14′ 43″ ist.

(In der Ptolem. Tafel sind näml. die Chorden von

156° 0′	117 Th.	22 Min.	40 Sec.	
155 30	117	16	4	
24 30	25	27	41	
24 0	24	56	58	

Folglich ist BD 12, 51′ solcher Theile, dergleichen AB 60 ist.

3°. In des III. B. 4 Cap. (p. 73.) berechnet er den Winkel BAD des bey B rechtwinklichten Dreyeks ABD, dessen Hypotenuse AD = 60, und die Seite BD = $2\frac{1}{2}$ oder $2\frac{30}{60}$ gegeben sind, folgendermassen: da BD 2, 30′ solcher Theile ist, dergleichen AD 60 ist: so wird BD 5 solcher Theile seyn, dergleichen AD 120 ist; der Bogen BD aber des um das Dreyek ABD beschriebenen Kreises 4, 46′ solcher Theile, dergleichen der Kreis 360 ist.

(In der Ptolem. Tafel sind nämlich die Chorden von

5° 0′	5 Th.	14 Min.	4 Sec.
4 30	4	42	40
)

Daher ist auch der Winkel BAD $\overline{4}$, 46′ solcher Theile, dergleichen zwey rechte Winkel 360 sind; und $\overline{2}$, 23′ solcher Theile, dergleichen vier rechte Winkel 360 sind (d. h. der Winkel BAD = 2° 23′).

4) Eben daselbst (p. 72.) folgert er aus eines rechtwinklichten Dreyeks zwey Seiten um den rechten Winkel die Hypotenuse nach El. I, 47; und mittelst dieser den einen spizen Winkel desselben, wie in dem Beyspiel n° 3.

5) In des IV B. 6 Cap. (p. 96.) schließt er das Verhältniß der Seiten BC und CA des Dreyeks ABC (fig. 11.), dessen Winkel B = 3° 24′, A = 23° 23′½ gegeben sind, mittelst des aus C auf AB gefällten Loths CD, folgendermassen: Da der Winkel B $\overline{3}$, 24′ solcher Theile ist, dergleichen vier rechte Winkel 360 sind; mithin $\overline{6}$, 48′ solcher Theile, dergleichen zwey rechte Winkel 360 sind: so ist auch des um das rechtwinklichte Dreyek BDC beschriebenen Kreises Bogen über CD $\overline{6}$, 48′ solcher Theile, dergleichen dieser Kreis $\overline{360}$ ist; und die gerade Linie CD ist $\overline{7}$, 7′ solcher Theile, deren die Hypotenuse BC $\overline{120}$ ist (nämlich die Chorden von $\left\{\begin{matrix}7° & 0\\ 6 & 30\end{matrix}\right.$ sind $\begin{matrix}7 & \text{Th.} & 19 & \text{Min.} & 33 & \text{Sec.}\\ 6 & & 48 & & 11 & \end{matrix}$). Gleichfalls ist der Winkel A $\overline{46}$, 47′ solcher Theile, dergleichen zwey rechte Winkel 360 sind: folglich auch des um das rechtwinklichte Dreyek ADC beschriebenen Kreises Bogen über CD $\overline{46}$, 47′ solcher Theile, dergleichen der Kreis $\overline{360}$ ist; die gerade Linie CD aber $\overline{47}$, 38′ 30″ solcher Theile, dergleichen die Hypotenuse CA $\overline{120}$ ist. (Die Chorden von $\left\{\begin{matrix}47° & 0'\\ 46 & 30\end{matrix}\right.$ sind nämlich $\begin{matrix}47 & \text{Th.} & 51 & \text{Min.} & 0 & \text{Sec.}\\ 47 & & 21 & & 9 & \end{matrix}$). Daher ist CA $\overline{17}$, $\overline{55}$′ 32″ solcher Theile, dergleichen CD $\overline{7}$, 7′, BC aber $\overline{120}$ ist.

6) In des III. B. 5 Cap. (p. 47.) berechnet er die dritte Seite und die übrigen zwey Winkel des bey A stumpf-

winklichten Dreyeks ABC (fig. 12.), deſſen Seiten um den ſtumpfen Winkel AB = 60, AC = $2\frac{1}{2}$ oder $2\frac{30}{60}$, und des ſtumpfen Nebenwinkel CAD = 30° gegeben ſind, folgendermaſſen: Auf die verlängerte BA ſey von C das Loth CD gefällt. Da der Winkel CAD $\overline{30}$ ſolcher Theile iſt, dergleichen vier rechte Winkel 360 ſind; oder $\overline{60}$ ſolcher Theile, dergleichen zwey rechte Winkel $\overline{360}$ ſind: ſo iſt auch des um das rechtwinklichte Dreyek CAD beſchriebenen Kreiſes Bogen über CD $\overline{60}$ ſolcher Theile, dergleichen dieſer Kreis $\overline{360}$ iſt; der Bogen über AD aber $\overline{120}$, als des Ueberreſts zum Halbkreis. Ihre Sehnen ſind mithin CD $\overline{60}$, AD $\overline{103, 55'}$ ſolcher Theile, dergleichen die Hypotenuſe AC $\overline{120}$ iſt. (In der Ptolem. Tafel iſt die Chorde von 120° 103 Th. 55 Min. 23 Sec.). Daher ſind auch CD $\overline{1, 15'}$; AD $\overline{2, 10'}$; BD $\overline{62, 10'}$ ſolcher Theile, dergleichen AC $\overline{2, 30'}$; und BA $\overline{60}$ ſind. Und da die Quadrate von CD und BD zuſammen das von BC geben; ſo iſt BC zunächſt $\overline{62, 11'}$ ſolcher Theile. CD iſt daher $\overline{2, 25'}$ ſolcher Theile, dergleichen BC $\overline{120}$ iſt; und des um das rechtwinklichte Dreyek BDC beſchriebenen Kreiſes Bogen über CD iſt $\overline{2, 18'}$ ſolcher Theile, dergleichen der Kreis $\overline{360}$ iſt. (Die Chorden von $\left\{\begin{matrix} 2^{\circ} & 30' \\ 2 & 0 \end{matrix}\right.$ ſind näml. $\left\{\begin{matrix} 2\text{Th.} & 37\text{M.} & 4\text{S.} \\ 2 & 5 & 40 \end{matrix}\right.$) Folglich iſt auch der Winkel B $\overline{2, 18'}$ ſolcher Theile, dergleichen zwey rechte Winkel $\overline{360}$ ſind; und $\overline{1, 19'}$ ſolcher, dergleichen vier rechte Winkel $\overline{360}$ ſind. Der Winkel CAD aber war $\overline{30}$ ſolcher Theile. Daher iſt der übrige Winkel ACB $\overline{28, 51'}$.

§. 126.

Das lezte Beyſpiel des vorigen §. berechnet Albatenius (§. 14.) in dem 28. Cap. ſeiner Schrift de scientia stellarum (Norimb. 1537. fol. 30. b.) unter der Vor-

ausſetzung AC = $2\frac{19}{240}$ oder $2\frac{4}{60}$, folgender geſtalt: Lineam usque ad punctum D inducemus directum; a puncto vero C katetum CD super lineam BD protrahemus. Triangulus itaque ADC est rectangulus: arcusque qui est super CD ex circulo circumdante triangulum ADC [qui est circulus, cujus centrum est A, secundum longitudinem AC circumductus; nach der Erklärung, welche er fol. 28. b. in einem ähnlichen Fall beyfügt], si circulus 360 partium fuerit, erit 30 partium; ejusque chorda mediata 30 ex quantitate, secundum quam linea AC 60 partium est: remanebitque AD ad perficiendum quartam 51 gradus [partium] et 57 minutorum ac 41 secundorum (nämlich die Hälfte der §. 125. n°6. für die Chorde von 120° angegebenen 103 Th. 55 Min. 23 Sec.); nam circulus AD ad perfectionem quartæ deficit, & est 60 partium [graduum] Sed ex quantitate, secundum quam linea AC est 2 partium & 4 minutorum et dimidiæ ac quartæ, erit linea CD 1 gradus 4 minutorum & 55 secundarum ac dimidiæ [1 partis 2 min. $22\frac{1}{2}$ sec.]; linea vero AD, quæ ad perficiendum quartam partem circuli deficit, erit 1 partis & 48 minutorum & 2 secundarum. Quare totam lineam BD 61 part. & 48 min. 2 sec. fore non ambigimus. Triangulus BDC est rectangulus. Linea ergo BC, quæ recto subtenditur angulo, erit nota; & est 61 & 48 & 35. At ex quantitate, secundum quam linea BC est 60 partium, erit linea CD 1 partis & 33 minutorum; arcus vero, qui super eam existit, est 0 & 57 ac 49, cum circulus, qui triangulum BDC circumdat [descriptus centro B, semidiametro BC], 360 partium fuerit.

Statt der Ptolemäiſchen Berechnungen beſonderer Beyſpiele, deren eines das obige zweyte (§. 125.) iſt, giebt Albatenius, aber ohne Beweis, die allgemeine an dem Ende der Note b. zu §. 14. (S. 18.) angeführte Regel; welche ſich zwar in den Satz auflöſt: daß in dem bey A rechtwinklichten Dreyek ABC (fig. 13.) die Seite AB zu AC ſich verhalte, wie der Sinus des Complements des Winkels B

zu

zu dem Sinus dieſes Winkels; oder daß eines rechtwinklichten Dreyeks Seiten um den rechten Winkel ſich verhalten wie die Sinus ihrer ſpitzen Gegenwinkel (§. 19. 31.); den aber Albatenius, ſo wenig als den allgemeineren §. 10. 13., irgendwo in ſeiner Schrift aufſtellt.

§. 127.

Gebers (§. 71. Note b. S. 156. f.) ebene Trigonometrie (Astronomiæ Lib. I. Prop. 24. 25. 26. p. 19. sq.), die er (Prop. 24.) mit den Worten ankündiget: Incipiamus ostendere semitam, qua, quod de lateribus trianguli rectilinei & angulis ipsius ignotum est, producatur propter illud, quod de eis notum est, ne fiat sermo in intentione multotiens; iſt bloß allgemeine Darſtellung des Ptolemäiſchen Verfahrens (§. 125.) auf die vier Hauptfälle §. 59. 24. 29. 18. ſchiefwinklichter Dreyeke angewendet. Denn ob er gleich bey den Kugeldreyeken Sinus gebraucht, und z. B. Lib. I. Prop. 13. (p. 11.) den Satz beweiſet: Quod omnis trianguli ex arcubus circulorum magnorum proportio sinus cujusque laterum ad sinum arcus anguli, cui subtensum est, est proportio una; ſo beſchränkt er ſich doch bey den ebenen Dreyeken auf die Ptolemäiſche Anwendung der Chordentafel mittelſt um die rechtwinklichten Dreyeke, worein er die ſchiefwinklichte zerfällt, beſchriebener Kreiſe; ſeinen vierten Fall ausgenommen, wo er den Kreis um das vorgegebene ſchiefwinklichte Dreyek ſelbſt beſchreibt.

1) Wenn nämlich in dem Dreyek ABC (fig. 11. 12.) die zwey Seiten AB, BC, und ihr Zwiſchenwinkel B gegeben ſind; ſagt er (Prop. 24.): Protraham a puncto C perpendicularem CD super lineam BA. Propterea ergo quod angulus ABC notus est, et linea BA nota; scitur, qualiter cadat perpendicularis CD: scilicet an cadat in eo, quod est inter duo puncta B & A; aut extra ab eis utrisque. Et cum angulus D est rectus; est linea CB diameter circuli, qui continet triangulum CBD: et quoniam angulus B est notus, erit arcus

illius circuli, qui est super lineam CD, notus; corda ergo ejus, quæ est linea CD, est nota per quantitatem, qua diameter circuli est nota. Quare remanet linea BD nota. Jam fuit linea BA nota per quantitatem, qua unaquæque duarum linearum CB, BD est nota. Quare fit propter illud linea DA nota per illam quantitatem. Et jam fuit ostensum, quod linea CD est nota. Ergo oportet, ut sit linea AC nota. Ergo per quantitatem, qua latus AC est 120, est perpendicularis CD nota. Ergo arcus, qui est super eam, circuli continentis triangulum est notus: ergo angulus CAD est notus. Et jam fuit angulus B notus. Quare remanet angulus ACB notus.

2) Wenn die Seiten AC, CB, und der erſten Gegenwinkel B gegeben ſind; bemerkt er (Prop. 25.), daß man noch wiſſen müſſe: Angulus BAC, cui subtenditur latus secundum duorum notorum, an sit expansus aut acutus; und fährt fort: Nam si protrahatur perpendicularis CD, scietur per illud, an cadat intra triangulum, aut extra ipsum: et declarabitur, sicut præmissum est, quod unumquodque duorum laterum CD & BD est notum per quantitatem, qua linea CB est nota. Et linea CA est nota per illam quantitatem: quare manet linea DA nota per eam. Et est arcus, qui est super latus CD, circuli, qui continet triangulum ADC, notus: ergo angulus CAD est notus. Et propterea quod unaquæque duarum linearum BD & AD jam provenerunt notæ, & propter illud linea BA nota.

3) Für den Fall, wenn des Dreyecks ABC drey Seiten gegeben ſind, giebt er in dem erſten Theil von Prop. 26. folgende Vorſchrift: Protraham perpendiculum CD. Tunc si fuerint duo latera AC, CB æqualia (fig. 14.): erunt duæ lineæ AD, DB æquales; quare unaquæque earum erit nota. Et si fuerint duo latera AC, CB diversa (fig. 11. 12.); tunc sit eorum brevius AC. Erit ergo superfluitas, quæ est inter duo quadrata BC, CA, nota; & est superfluitas, quæ est inter duo quadrata BD, DA. Quapropter dividam superfluitatem illam per

lineam BA: & accipiam superfluitatem, quæ est inter illud, quod exivit, & inter lineam AB; & accipiemus medietatem illius superfluitatis; quæcunque sit, erit linea AD. Dieß beruhet auf dem Saße: daß, wenn AB in G halbirt wird, $BC^q - CA^q = BD^q - AD^q = 2AB \times GD$ (Apollonius von Pergen Ebene Oerter; überseßt von J. W. Camerer. Leipz. 1796. S. 13. f. 20. f. 208. f.); folglich $\frac{BC^q - CA^q}{BA} = 2GD$: und nun in fig. 11. $AD = GA - GD = \frac{BA - {}^2GD}{2}$; in fig. 12. aber $AD = GD - GA = \frac{{}^2GD - BA.}{2}$ Multiplicabo ergo eam in se ipsam, & projiciam quadratum ejus ex quadrato AC; quare remanebit quadratum perpendicularis CD; erit ergo perpendicularis CD nota per quantitatem, qua lineæ AC & CB sunt notæ. Quapropter erit linea BD nota. Ergo arcus, qui est super perpendicularem CD, circuli continentis triangulum BDC est notus; ergo angulus B est notus. Quare erit angulus A notus. (Die Ueberseßung ist wohl von dem lezten Quapropter an nicht richtig; auch ist derselben nur fig. 11. beygefügt.) Quodsi illud, quod egreditur de divisione superfluitatis, quæ est inter quadrata duorum laterum BC & CA, per latus BA, fuerit majus latere BA (fig. 12): erit quantitas, quæ egreditur ab angulo A, ipsa quantitas anguli [CAD], qui sequitur angulum trianguli quæsitum [BAC]. Projiciam ergo ipsam ex duobus rectis; & remanebit angulus trianguli quæsitus. Et propter quod angulus B est notus, remanet angulus ACB notus.

4) Ueber den Fall, wenn des Dreyeks eine Seite und die Winkel gegeben sind, sagt er in dem zweyten Theil von Prop. 26: Si fuerint ea, quæ de triangulo nota sunt, tres anguli ejus; & inquisivimus unumquodque laterum ejus: erit proportio unius ad aliud nota; & illud ideo, quoniam unusquisque arcuum, qui sunt super latera ejus circuli, qui continet ipsum, erit notus:

ergo erit unaquæque cordarum eorum; & sunt latera ejus nota per quantitatem, qua diameter illius circuli est nota: ergo proportio uniuscujusque laterum ejus ad unumquodque duorum reliquorum erit nota. Ergo si fuerit unum laterum ejus notum per aliquam quantitatem; erit unumquodque duorum reliquorum notum per illam quantitatem.

§. 128.

Campanus, welcher um die Mitte des 13ten Jahrhunderts lebte (Montucla Hist. de Math. Nouv Edit. T. I. p. 506. sq.), hat dem 13ten Satz des II Buchs seiner Uebersetzung der Euklidischen Elemente die Bemerkung beygefügt: Notandum, per hanc & præcedentem & penultimam primi quod cognitis lateribus omnis trianguli cognoscitur area ipsius; & auxiliantibus tabulis de chorda & arcu cognoscitur omnis ejus angulus. (Euclidis — Elementor. geometric. Libri XV. cum expositione Theonis in priores XIII. a Barthol. Zamberto Veneto Latinitate donata, Campani in omnes; — Basil. 1558. p. 51.)

In der dem Primum mobile Erasmi Oswaldi Schreckenfuchsii (Basil. 1567.) angehängten Doctrina sinuum & arcuum ex Luca Gaurico wird bey der Aufgabe: Cujuslibet arcus dati sinum rectum primum invenire (p. 203.), auf eine Tabula sinus recti per Campanum supputata verwiesen, worin man e regione arcus dati finde sinum rectum primum illi correspondentem similium utique partium, qualium est diameter 200 000. Hier steht aber wohl durch einen Drukfehler Campanum statt Apianum (S. §. 16. Note g. S. 31. ff. und die Note zu §. 43. S. 101.).

§. 129.

Von Regiomontanus fünf Büchern De triangulis omnimodis (§. 16. Note d. S. 25. f.) sind die zwey ersten den ebenen Dreyeken gewidmet. Der mit der Analy-

sich der griechischen Geometer wohl bekannte Verfasser ahmt dieselbe in seinem Vortrag nach; und schikt daher in dem ersten Buch mehrere Sätze der Euklidischen Data, und andere ähnliche, mit ihren Beweisen voraus: z. B. Omnis datæ lineæ quadratum erit cognitum; Quadrati noti costa non ignorabitur; Si quotlibet quantitates inter se datæ fuerint, aggregatum ex eis notum habebitur; Duarum inæqualium inter se datarum quantitatum differentiam cognitum iri; Omnes duæ inter se datæ quantitates proportionem habent eam, quam duo numeri, secundum quos ipsæ mensurantur; Proportio duarum quantitatum data ex altera earum præscita reliquam suscitabit cognitam; Si fuerint duæ quantitates inter se datæ, quarum altera per mensuram novam sit cognita, & reliqua per eandem novam mensuram nota veniet; Si utraque duarum quantitatum ad tertiam data fuerit, ipsæ inter se datæ habebuntur. (L. I. Prop. 1—8.).

§. 130.

In dem ersten Buch zerlegt Regiomontanus die aufzulösende schiefwinklichte Dreyeke auch durchgängig, wie Ptolemäus, in rechtwinklichte; und die Berechnung von diesen gründet er, ausser El. I, 47. auf den auch bey Albatenius (§. 126.) zum Grunde liegenden Satz: In omni triangulo rectangulo, si super vertice acuti anguli secundum quantitatum lateris maximi circulum descripseris, erit latus ipsum acutum subtendens angulum sinus rectus conterminalis sibi arcus dictum angulum respicientis; lateri autem tertio sinus complementi arcus dicti æqualis habebitur. (Lib. I. Prop. 20. p. 21. sq.).

§. 131.

In rechtwinklichten Dreyeken lehrt er zuerst allgemein, hernach an beygefügten Beyspielen,

1) Aus zwey gegebenen Seiten, die dritte Seite (Prop. 26.), und die Winkel (Prop. 27.);

2) Aus dem gegebenen Verhältniß der Seiten, die Winkel (Prop. 28.);

3) Aus einem gegebenen spitzen Winkel und einer gegebenen Seite, die übrigen Winkel und Seiten (Prop. 29.);

4) Aus einem gegebenen spitzen Winkel, die Verhältnisse der Seiten (Prop. 30.) finden.

Die Aufgabe Prop. 26. führt er auf El. I. 47. und auf seine Sätze 1. 3. 4. 2. zurück; und Prop. 27. löst er folgendermassen auf: Si alterum datorum laterum recto opponatur angulo, satis est. Si vero non; per præcedentem ipsum addiscemus: nam absque eo propositum attingendi non erit potestas. Sit itaque triangulus ABC (fig. 13.), angulum A rectum habens, cujus duo latera BC & CA sint data. Dico, quod omnes anguli ipsius noti erunt. Super vertice enim anguli acuti B, quem videlicet latus subtendit datum, tanquam centro, secundum quantitatem lateris BC, circulo descripto; erit per 20. hujus CA sinus arcus sibi conterminalis, qui respondet angulo B, quem inquirimus. Cumque duæ lineæ BC & CA inter se datæ sint ex hypothesi per mensuram veterem; BC autem semidiameter circuli descripti data sit per mensuram novam, quæ quidem est una partium sinus totius: erit & CA nota per eandem mensuram, docente 7. hujus. Dum igitur BC est sinus totus vel sinus quadrantis, erit AC sinus notus; & per tabulam sinus, qua neglecta hoc in proposito nihil efficere possumus, arcum ejus addiscemus. Cognito autem arcu dicti sinus, datur et angulus, quem respicit arcus ille: nam arcus ipse & angulus secundum eundem numerum mensurantur, quemadmodum tota circumferentia & quatuor recti secundum eundem numerum communiter mensurantur; quod in 21. hujus commemoravimus Per 22. itaque hujus reliquum acutum angulum C cognoscemus. Rectum autem angulum A 21. hujus notam demonstrabat.

Ueber Prop. 29. giebt er die Erklärung: Trianguli ABC, angulum A rectum habentis, angulus B sit cognitus, cum uno latere quocunque, v. gr. AC. Dico, quod omnes ejus anguli cum lateribus omnibus innotescant. Anguli profecto cognoscentur ex 21. & 22. hujus; restat igitur invenire latera. Per 20. autem hujus & tabulam sinus, hypothesi juvante, erit utrumque laterum CA & AB cognitum, ut BC est sinus totus. Duo itaque latera quælibet trianguli propositi datam invicem habebunt proportionem: cumque ex hypothesi unum eorum datum sit per mensuram novam; erunt per 6. aut 7. hujus reliqua data.

Dieß enthält zugleich die Auflösung von Prop. 30.

Und bey Prop. 28. schließt er: Aut alterum duorum laterum opponitur angulo recto, aut non. Si primum; sit latus BC recto angulo A oppositum, cujus proportio ad latus AC sit nota. Dico, quod anguli hujus trianguli innotescent. Est enim AC sinus arcus anguli B per 20. hujus, dum BC est semidiameter circuli, scilicet sinus totus. Proportio ergo sinus totius ad sinum anguli B nota est: hinc sinus ille notificabitur; & eundem angulus B non latebit. Si vero proportio duorum laterum BA & AC data fuerit: erit proportio quadratorum eorum data; & conjunctim proportio aggregati ex quadrato BA cum quadrato AC, hoc est, quadrati BC propter angulum A rectum, ad quadratum AC nota erit; unde et linearum proportio non ignorabitur: reliqua ut ante.

§. 132.

Prop. 33. 34. beziehen sich auf die Winkel, und auf das Verhältniß der Seite und Höhe gleichseitiger Dreyeke.

Prop. 35—41. handeln von gleichschenklichten Dreyekken: namentlich lehren Prop. 35. aus einem gegebenen Winkel, die andere zwey; Prop. 38. aus einem gegebenen Winkel und einer gegebenen Seite oder Höhe derselben, die übrige

Seiten und Höhen; Prop. 39. aus den gegebenen Seiten, die Winkel finden. Prop. 38. wird auf Prop. 29; Prop. 39. auf Prop. 28. zurükgeführt.

§. 133.

Die übrigen Sätze des I. Buchs (Prop. 42 — 57.) beschäftigen sich mit den ungleichseitigen schiefwinklichten Dreyeken: und zwar

Prop. 42—47. mit dem Fall, wenn des Dreyeks drey Seiten;

Prop. 49. wenn zwey Seiten und ihr Zwischenwinkel;

Prop. 50. 51. wenn zwey Seiten und der Gegenwinkel der einen;

Prop. 52. 53. wenn eine Seite und zwey Winkel gegeben sind.

In den andern Sätzen kommen Verhältnisse der Seiten unter den gegebenen oder gesuchten Stüken vor.

§. 134.

Den ersten Fall betreffend, lehrt Prop. 42. die Art der Winkel des Dreyeks durch Vergleichung der Summe der Quadrate der sie einschliessenden Seiten mit dem Quadrat der Gegenseite bestimmen, zufolge El. I, 47. 48. II, 12. 13.

Sind nun beyde Winkel schief, die an einer als Grundlinie angenommenen Seite liegen; und wird aus der Spize ihres Gegenwinkels das Perpendikel auf sie gezogen: so geben Prop. 43. 44. 45. drey Arten die Stüke jener Grundlinie zu berechnen, welche zwischen das Perpendikel und die Endpunkte der Grundlinie fallen. Die erste Art (Prop. 43.) beruhet auf El. II, 12. 13; wie in §. 35. 36. Die zweyte (Prop. 44.) gründet sich darauf: daß, wenn (fig. 16.) das gegebene Dreyek $\left\{\begin{matrix}ABC\\ABF\end{matrix}\right\}$ ist, $BA^q - \left\{\begin{matrix}AC^q\\AF^q\end{matrix}\right\} = BE^q - \left\{\begin{matrix}EC^q\\EF^q\end{matrix}\right\}$ (El. I, 47.) $= FBC$ (El. II, 6.); daher $\frac{BA^q - AC^q}{BC} = FB$, oder $\frac{BA^q - AF^q}{FB} = BC$; und nun $\left\{\begin{matrix}CE\\FE\end{matrix}\right\} = \frac{CB - BF}{2}$, BE

= BF + FE. Die dritte (Prop. 45.) leitet FB oder BC aus dem Satz her; daß das Rectangel FBC = GBL = (BA + AC) (BA - AC), und das weitere wie in Prop. 44. (vergl. §. 39.).

Und nun wird die Berechnung des Perpendikels (Prop. 46.), und der Winkel der Dreyeke (Prop. 47.) auf Prop. 26. 27. (S. §. 131.) zurükgeführt.

§. 135.

Wenn des Dreyeks ABC (fig. 39. 40. 41.) zwey Seiten BA, AC, und der Winkel dazwischen A gegeben sind (wobey Regiomontanus nur auf den Fall, wenn der Winkel A spitz ist, Rükſicht nimmt); heißt Prop. 49. auf eine der gegebenen Seiten AC das Loth BE aus der Spitze des Gegenwinkels B fällen; und nach Prop. 29. (S. §. 131.) die Seiten AE, BE des rechtwinklichten Dreyeks AEB berechnen, dessen Seite AB und der Winkel A gegeben sind.

Ergäbe sich nun AE = AC: so fielen BC mit BE, der Winkel BCA mit dem rechten E, und der Winkel ABC mit der Ergänzung ABE des Winkels A zu einem rechten zusammen (fig. 40.).

Findet man aber AE $\left\{\begin{matrix}<\\>\end{matrix}\right\}$ AC: so hat man CE $= \left\{\begin{matrix}AC-AE,\\AE-AC\end{matrix}\right.$ und nun des rechtwinklichten Dreyeks BEC Seiten CE, BE um den rechten Winkel; findet also BC und den Winkel BCE mittelst Prop. 26. 27. (S. §. 131.): und für AE < AC (fig. 39.) ist des Dreyeks ABC Winkel BCA = dem gefundenen BCE; für AE > AC aber (fig. 41.) ist BCA = 2R - BCE: woraus sich auch der dritte Winkel nach El. I, 32. ergiebt.

§. 136.

Bey zwey gegebenen Seiten AB, BC und dem Gegenwinkel BCA der einen unterscheidet Regiomontanus, ob dieser stumpf (Prop. 50.), oder spitz (Prop. 51.) ist; nimmt aber in dem zweyten Fall nur auf den unbestimmten Rükſicht,

wenn der gegebene spitze Winkel der kleinern gegebenen Seite gegenüber liegt. In beyden Fällen zieht er aus der Spitze B des Winkels zwischen den zwey gegebenen Seiten AB, BC das Loth BE auf die dritte unbekannte Seite AC (*Fig.* 38. 39. 41.)

Ist nun der gegebene Winkel ACB stumpf (fig. 41.): so folgert er in dem rechtwinklichten Dreyek BEC, dessen Seite BC, und der Winkel BEC als Nebenwinkel von BCA gegeben sind, die Seiten BE, CE nach Prop. 29; alsdenn in dem rechtwinklichten Dreyek BEA, von welchem nun die Seiten AB, BE bekannt sind, die Seite AE und den Winkel A nach Prop. 26. 27; worauf AC = AE - EC, und der Winkel ABC = 2 R — (ACB + A).

Für den zweyten Fall (*Fig.* 38. 39.) beweißt er (Prop. 51.): Trianguli duo latera data cum angulo acuto, cui alterum [minus] eorum opponitur, ad latus & angulos reliquos cognoscendos nequaquam sufficere. Verum, qua lege perpendicularis cadat, si callebimus, omnia patefient. Nämlich aus dem Dreyek BEC, worin BC und der Winkel C gegeben sind, erhält man wieder BE, EC, mittelst Prop. 29; alsdenn aus dem Dreyek BEA, die Seite AE und den Winkel BAE, mittelst Prop. 26. 27: und nun CA = $\begin{cases} CE - EA & \textit{Fig.}\ 38.; \\ CE + EA & \textit{Fig.}\ 39. \end{cases}$ den Winkel BAC = $\begin{cases} 2R - BAE & \textit{Fig.}\ 38; \\ BAE & \textit{Fig.}\ 39. \end{cases}$ und den dritten Winkel nach I, 32.

§. 137.

Wenn des Dreyeks ABC (*Fig.* 11. 12.) Seite BC, und die anliegende Winkel B, ACB (Prop. 52.), oder der anliegende Winkel B und der Gegenwinkel BAC (Prop. 53.), gegeben sind: fällt Regiomontanus in dem ersten Fall willkührlich auf eine der zwey andern Seiten, in dem zweyten auf die zwischen den gegebenen Winkeln liegende AB, das Perpendikel CD aus dem gegenüber liegenden Endpunkt der gegebenen Seite BC. In beyden Fällen, bemerkt er,

ſey auch des Dreyeks dritter Winkel zufolge El. I, 32. oder ſeines 25. Satzes bekannt: und ſo wiſſe man, ob das Perpendikel CD innerhalb, oder auſſerhalb des Dreyeks falle. Nun könne man nach Prop. 29. in dem Dreyek BDC die Seiten CD, BD; alsdenn, mittelſt der gefundenen CD, in den Dreyeken ADC die Seiten AC, AD berechnen: finde alſo des Dreyeks ABC Seiten AC, und AB $= \begin{cases} BD+DA & \textit{Fig.}\ 11. \\ BD-DA & \textit{Fig.}\ 12. \end{cases}$

§. 138.

Erſt zu Anfang ſeines II. Buchs (p. 46. sq.) ſtellt Regiomontanus den allgemeinen Satz auf (Prop. 1.): In omni triangulo rectilineo proportio lateris ad latus est tanquam sinus recti anguli alterum eorum respicientis ad sinum rectum anguli reliquum latus respicientis; und wendet denſelben (auſſer andern Aufgaben, worin Verhältniſſe, Summen, Unterſchiede der Seiten, und der Segmente der Grundlinie, Fläche, Höhe des Dreyeks, u. ſ. w. gegeben ſind) in Prop. 3. 4. 5. zur Auflöſung des erſten Theils von Prop. 38. und der Aufgaben Prop. 52. sq. 50. sq. des I. Buchs an; mit den Bemerkungen (p. 47. sq.) zu Anfang von Prop. 3: Quanquam in primo sufficienter hanc rem explicasse videar, libet tamen paulisper circa triangulos æquicrures, et deinde circa triangulos varios [scalenos] immorari, quo ea, quæ superius quærebantur, breviori tramite consequamur; und an dem Ende von Prop. 3. 4: Sic absque perpendiculari undecunque ducta propositum attingere didicimus; Hoc pacto perpendicularem undecunque etiam duxisse supervacaneum censebitur.

Von Prop. 1. aber giebt er folgenden Beweis: Si triangulus fuerit rectangulus, ex 28. primi hujus comparabimus demonstrationem. Si vero non fuerit rectangulus; duo tamen latera fuerint æqualia: erunt quoque duo anguli eis oppositi, & ideo sinus eorum, æquales; unde de ipsis duobus lateribus propositionem

nostram verificari constat. Quodsi alterum altero longius extiterit: sit verbi gratia AG longius (fig. 73.); dirigaturque BA usque ad D, donec tota BD æqualis habeatur lateri AG. Deinde super duobus punctis B & G factis centris describi intelligantur duo circuli æquales secundum quantitates linearum BD & GA, quorum circumferentiæ occurrant basi trianguli in punctis L & E; ita ut arcus DL quidem angulum DBL sive ABG, arcus autem AE angulum AGE sive AGB subtendat. Ex duobus demum punctis A & D duæ perpendiculares AK & DH basi incidant. Palam autem, quod DH est sinus rectus anguli ABG, & AK sinus anguli AGB. Est autem per 4. sexti Euclidis proportio AB ad BD, & ideo ad AG, sicut AK ad DH. Quare certum est, quod asserebat propositio. *)

*) Den nämlichen Beweis geben Fink in Geometriæ rotundi (S. Note zu §. 43. S. 102.) Libro X. de calculo triangulorum p. 274. 287. sq.); Lansberg in Triangulorum geometriæ. (S. Note zu §. 43. S. 103.) Libro III. de rectilineorum triangulorum calculo (p. 154. 160.)

Clavius in Prop. 1. des Triangula rectilinea betitelten Theils seiner in der Note zu §. 43. S. 102. angeführten Schrift (p. 299. sqq.) folgert den Satz für das Verhältniß der Hypotenuse und eines Catheten eines rechtwinklichten Dreyecks aus der zweyten Definition des Sinus §. 11; hieraus, durch Zusammensetzung der Verhältnisse, für das Verhältniß der zwey Catheten; und eben so für jede zwey Seiten eines schiefwinklichten Dreyecks, mittelst des aus der Spitze des Winkels, den sie einschliessen, auf die Gegenseite gefällten Perpendikels; auch für diese auf die ähnliche Art wie Regiomontanus, mittelst Abscheidung GC = BA von der längern Seite AG.

Den §. 13. angeführten Beweis haben Rheticus in dem, einen Theil des Opus Palatinum de triangulis (S. §. 16. Note i. S. 37.) ausmachenden, De triquetris rectarum linearum in planitie Liber unus (p. 95. sqq.); Pitiscus in Trigonometriæ (S. §. 71. Note a. S. 151.) Liber III. de dimensione triangulorum planorum (p. 86. sq.); Snellius in Doctrinæ triangulorum canonicæ (S. §. 71. Note b. S. 159.) Lib. II. Prop. 4. (p. 65. sq.); Gellibrand in Trigonometriæ Britannicæ (S. §. 71. Note a. S. 155.) Lib. II.

§. 139.

In dem 24. Satz des II. Buchs (p. 56.) lehrt Regiomontanus: Datis tribus lateribus trianguli rectilinei, diametrum circuli eum circumscribentis invenire; auf die §. 6. 54. angezeigte Art.

Und in dem 26 Satz (p. 58.) beweißt er, so wie es §. 53. geschieht: Data area trianguli cum eo, quod sub duobus lateribus continetur, rectangulo; angulus, quem basis respicit, aut cognitus emerget, aut cum angulo cognito duobus rectis æquipollebit.

§. 140.

Copernicus, der seine §. 16. Note g. S. 35. erwähnte Trigonometrie noch, ehe Regiomontans Schrift De triangulis durch den Druk bekannt gemacht worden war, ausgearbeitet hat (S. a. a. O.), ordnet seine in sieben Paragraphen zusammengefaßte, aber unmittelbarer auf eine Chorden, als auf die von ihm vorausgeschikte Sinustafel passende Anweisung zur Auflösung ebener Dreyeke (De revolutionibus orbium cœlestium. Lib. I. Cap. XIII. De lateribus et angulis triangulorum planorum rectilineorum. fol. 19. b. sqq.) unter die drey Fälle: Wenn eine Seite und die Winkel, zwey Seiten und ein Winkel, die drey Seiten gegeben sind.

§. 141.

Ueber den ersten Fall drükt er sich (§. I.) etwas unbestimmt und kurz so aus: Trianguli datorum angulorum dantur latera. Sit, inquam, triangulum ABC (*Fig.* 1.); cui per quintum problema quarti Euclidis circumscribatur circulus. Erunt igitur et AB, BC, CA circumferentiæ datæ, eo modo, quo CCCLX partes sunt duobus rectis æquales. Datis autem circum-

P. I. Cap. II. Prop. 3. (p. 62.); Cavalieri in Trigonometriæ (S. §. 69. Note a. p. 140.) Pars prior de communibus ejusdem fundamentis, specialiter autem de plana (p. 17.).

ferentiis, dantur etiam latera trianguli inscripti circulo, tanquam subtensæ, per expositum canonem, in partibus, quibus dimetiens assumta est 200 000.

§. 142.

In dem zweyten Fall unterscheidet er:

1) Ob die gegebene Seiten AC, CB (*Fig.* 14.) gleich seyen (§. II.)? zeigt, daß ein gegebener Winkel die übrigen zwey bestimme; und schließt: Sed datorum angulorum trianguli dantur latera; datur et ipsa AB basis ex canone in partibus, quibus AC vel CB tanquam ex centro fuerit 100 000 partium, sive dimetiens 200 000 partium.

§. 143.

a) Ob der gegebene Winkel A (*Fig.* 13.) ein rechter sey (§. III.)?

α) Sind nun die Seiten um den Winkel A gegeben; so folgert er: Liquidissimum est, quod, quæ ex AB et AC fiunt quadrata, æqualia sunt ei, quod a basi BC; datur ergo longitudine BC, et ipsa latera invicem ratione. Sed segmentum circuli, quod orthogonium suscipit triangulum, semicirculus est, cujus BC basis dimetiens fuerit. Quibus igitur BC partibus fuerit 200 000, dabuntur AB et AC, tanquam subtendentes reliquos angulos. Quos idcirco ratio canonis patefaciet in partibus, quibus CCCLX. sunt duobus rectis æquales.

β Den andern Fall betreffend, sagt er: Idem eveniet, si BC fuerit datum cum altero rectum angulum comprehendentium; quod jam liquide constare arbitror.

§. 144.

3) Ob der zwischen den gegebenen Seiten BA, AC liegende gegebene Winkel BAC spiß (*Fig.* 39. 41.), oder stumpf (*Fig.* 38.) sey (§. IV. V.)?

4) Ob der gegebene schiefe Winkel BAC einer der zwey gegebenen Seiten CB, BA gegenüber liege (§. VI.)?

Beyde Fälle löset er auf die ähnliche Art auf, wie Geber §. 17. no 1. 2, und Regiomontanus §. 135. f.; ohne bey dem zweyten (n° 4.) der dabey unter gewissen Bedingungen statthabenden Zweydeutigkeit (§. 24. f.) zu erwähnen.

Seine Auflösung des Falls n° 3. lautet nämlich: Ex signo B descendat perpendicularis ad AC, productam, si oportet, quæ sit BE (*Fig.* 38. 39. 41.); per quam discernuntur duo orthogonii BAE, BCE. Et quoniam in BAE dantur anguli; nam E rectus, et BAE per hypothesin, vel ut exterior dati BAC: dantur ergo BE et AE, tanquam subtendentes angulos BAE et ABE, in partibus, quibus AB est 200 000, dimetiens circuli, per canonem. Et eadem ratione, qua AB dabatur longitudine, dantur BE et AE similiter. Datur etiam EC, qua AC et AE se invicem excedunt. Igitur et in triangulo rectangulo BCE, datis lateribus BE et EC, datur latus quæsitum BC et angulus BCE, per præcedentem demonstrationem (§. 143.)

Und die des Falls n° 4: Sit jam alterum datorum laterum subtendens angulum BAC datum, quod sit CB, cum BA. Datur ergo per canonem CB in partibus, quibus est dimetiens circuli, circumscribentis triangulum ABC, partium 200 000: et pro ratione data ipsius CB ad BA datur in similibus partibus BA; atque per canonem, qui sub ACB angulus, cum reliquo ABC angulo: per quem etiam AC subtensa datur, qua ratione data dantur quomodolibet magnitudine.

§. 145.

Den dritten Hauptfall (§. 140.) betreffend, giebt er (§. VII.) für gleichschenklichte Dreyecke die etwas undeutliche Regel: Aequalia latera ad tertium sunt, sicut di-

midia diametri ad subtendentem circumferentiam, per quam datur angulus aequalibus comprehensus lateribus ex canone, quibus circa centrum CCCLX. sunt quatuor rectis æquales; deinde ceteri anguli, qui ad basim, etiam dantur e duobus rectis tanquam dimidia. (vgl. §. 30. 11.)

Die Berechnung der Winkel eines ungleichschenklichten Dreyeks ABC (*Fig.* 16.) führt er eben daselbst

1) mittelst Fällung des Loths AE auf die gröste Seite BC, und Bestimmung ihrer Abschnitte BE, EC nach El. II, 13. auf §. 143, und dessen Anwendung auf die Dreyeke AEB, AEC; oder

2) mittelst der §. 39. beschriebenen Construction und Bestimmung von BF, alsdenn von FC = BC - BF, für den Winkel C auf den ersten Fall dieses Syhen, und für die übrigen auf §. 144. zurük.

§. 146.

Die §. 64. 69. 105. angezeigte Erleichterungen der Auflösung rechtwinklichter Dreyeke, deren zwey Seiten um den rechten Winkel oder eine dieser Seiten und ein spizer Winkel gegeben sind, mittelst der Tangenten und Secantentafeln, wird als Zwek der Berechnung derselben von Rheinhold in den §. 62. Note e (S. 135.) und §. 69. Note c (S. 141.) angeführten Stellen angegeben. Fink (Geom. rot.) sagt davon p. 278: Radius est ad tangentem anguli, ut crus recti et dicti ad crus reliquum. Hoc elementum docebit, dato angulo cum crure, reliqui cruris inventionem; et datis cruribus angulorum investigationem monstrabit. Ea de re est apud Rheticum in Dialogo suo, et Rheinholdum Præc. 9. Tab. direct. Und p. 280: Radius est ad secantem anguli, ut crus adjacens ad basin. Hoc elemento, dato crure cum angulo, invenitur basis; et rursus, data basi cum crure, exquiruntur anguli.

Eben

Eben dieſe Rechnungsvortheile führt Rhäticus in ſeines Buchs De triquetris rectarum linearum in planitie (S. Anmerk. zu §. 138.) Præcept. 6. 7. p. 97.) an. Für den Fall aber, wenn der gegebene Winkel eines Dreyeks zwiſchen zwey gegebenen Seiten ſchief iſt, giebt er nur die §. 78. beſchriebene Methode, ungefähr in den nämlichen Ausdrüken wie Copernicus (§. 144. n° 3.); mit Verweiſung auf ſeine Præcept. 1. 4. (deren Reſultat p. 95. war: In triquetris rectarum linearum in planitie angulorum perpendicula ratione cum subtendentibus lateribus congruunt) und 6.

§. 147.

In Regiomontans Schriften finden ſich nur die in der Note c. zu §. 62. (S. 130.) erwähnte Anwendungen ſeines Canonis foecundi auf ſphäriſch aſtronomiſche Aufgaben. Unter den vielfältigen Vortheilen, die er von denſelben a. a. O. rühmt, war aber ohne Zweifel auch die erſtgedachte Abkürzung der Berechnung der Winkel eines ebenen rechtwinklichten Dreyeks (§. 62.); vielleicht ſelbſt die der Winkel eines ebenen Dreyeks, deſſen zwey Seiten um einen gegebenen ſchiefen Winkel gegeben ſind (§. 81. f.). Wenigſtens hat er die §. 83. angezeigte Einleitung zu derſelben in folgender, dem 5. Satz ſeines II. Buchs De triangulis (p. 48.) beygefügten Bemerkung angegeben: Quamvis ex duobus lateribus AB et AC cognitis cum angulo BAC ab eis comprehenso (*Fig.* 20. 27.) aliter quam in primo [Libro, Prop. 49. S. §. 135.] reliquos angulos cum tertio latere dimetiendi sit potestas; quemadmodum nunc recitabitur: non tamen per hanc viam operandum suadeo. Erit enim, propter angulum BAC notum, congeries duorum angulorum ABC et ACB cognita. Cumque proportio sinus unius eorum ad sinum alterius sit cognita; est enim sicut duorum laterum AB et AC data: fieret per 23. quarti hujus uterque angulorum ABC et ACB notus. Sed hæc via nihil facilitatis addit; quare in tali proposito a 49. primi recedere non licebit.

§. 148.

Regiomontanus beweiſet nämlich in Lib. IV. Prop. 21. (p. 110. sq.) nach Ptolemäus (Almag. I, 12. p. 18. sq. der griech. Ausg.): Si quis arcus notus, minor semicircumferentia, in duos dividatur, quorum sinus proportionem habeant datam; uterque eorum notus erit: und folgert daraus in dem 23. Satz (p. 113.): Si angulum notum in duos particulares secueris angulos, quorum sinus proportionem habeant datam; uterque eorum notus erit *).

Jenen Satz deducirt er folgendermaſſen: Sit (*Fig.* 33.) arcus FEG datus, minor semicircumferentia, divisus in duos FE et EG; sitque proportio sinus arcus FE ad sinum arcus EG data. Dico, quod uterque arcuum partialium FE et EG datus habebitur. Subtendatur enim arcui FEG corda sua FG; ducaturque per punctum E et centrum circuli C diameter circuli, secans cordam FG in puncto H: ex punctis autem F et G arcum FEG terminantibus duæ rectæ descendant perpendiculares ad diametrum, quæ sint FK et GI; et quarum utramque constat esse sinum rectum arcus sibi conterminalis, FK quidem arcus FE, & GI arcus GE. Educatur etiam semidiameter CL, orthogonaliter secans cordam FG in puncto P.

Si igitur proportio sinuum data fuerit proportio æqualitatis; erunt duo arcus FE et EG æquales per communem sententiam, sinibus suis æqualibus exi-

*) Regiomontanus beweiſet noch in dem 22. Satz ſeines IV. Buchs (p. 111. sqq.), ebenfalls nach Ptolemäus (l. c. p. 19.): Si data fuerit differentia duorum arcuum cum proportione sinuum suorum, uterque eorum cognitus habebitur; und in dem 24ten (p. 113. sq.): Data differentia duorum angulorum & proportione sinuum suorum, utriusque eorum quantitatem addiscemus; und gebraucht in dem 33. Satz (p. 121. sq.) den 22. und 24ten zur Berechnung der Seiten eines ſchiefwinklichten Kugeldreyeks, deſſen drey Winkel gegeben ſind.

stentibus: cumque totus arcus FEG sit notus; erit et uterque arcuum FE et EG notus.

Si vero proportio dictorum sinuum non fuerit proportio æqualitatis; erit alter eorum altero major. Sit itaque FK major sinu FI; unde et arcus FE major erit arcu EG. Cum autem proportio FK ad GI sit nota; oportet eam in terminis notis reperiri, & ideo in numeris notis, qui sint r et s; r quidem major, et s minor; ita ut sit proportio sinus FK ad sinum GI sicut r ad s. Cum autem duo trianguli FKH & GIH rectanguli duos angulos apud H contrapositos habeant æquales: erunt ipsi per 32. primi æquianguli; et ideo per 4. sexti proportio FK ad GI sicut FH ad HG. Proportio autem FK ad GI erat tanquam r & s. Quare et proportio FH ad HG est veluti r ad s; & conjunctim FG ad GH sicut $r+s$ ad s. Tres autem harum quantitatum notæ sunt: $r+s$ quidem propter duos numeros r, s notos; corda denique FG, propter arcum FEG notum, intercedente tabula sinuum aut cordarum. Quarta igitur, scilicet GH, nota veniet. Est autem GP nota medietas cordæ FG per 3. tertii. Reliqua igitur HP nota erit. Educta insuper semidiametro CF, erit triangulus CPF rectangulus, cujus duo latera CF & PF nota sunt: unde & per 26. primi hujus [S. §. 131.] linea CP nota prodibit. Triangulus itaque CPH, duo latera CP et PH habens cognita, angulum HCP cognitum afferet per 27. primi hujus [S. §. 131.]: qui quidem ad quatuor rectos eam habet proportionem, quam arcus LE ad totam circumferentiam. Arcus igitur LE notus habebitur. Quem si arcui FL, dimidio scilicet arcus FEG, addideris, resultabit arcus FE notus; ipse demum ex eodem arcu dimidio, sive ex arcu GL, ablatus relinquet arcum EG cognitum.

§. 149.

So war zur Erfindung der Methode §. 80. ff. nur noch die Anwendung der Regel §. 64. auf die Bestimmung des Verhältnisses FP zu CP und auf die Berechnung des Winkels HCP zu machen übrig.

Auf diesem Weg giebt sie auch Fink in dem X. Buch seiner 1583. herausgegebenen Geometriæ rotundi (S. die Anmerkungen zu §. 43. und 138. S. 102. 348.) als von ihm bewerkstelliget an.

Nämlich §. 8. (p. 281. sq.) sagt er: Licet data summa — duarum peripheriarum vel angulorum, et ratione sinuum, sigillatim utrumque secernere. Sunt de hoc postulato secundum — Theonis lemma cyclicum 11. C. I. §. 21. 23. — Pr. IV. Regiomontani de triangulis; quorum inventionis rationem illic perlegere potes. Nobis hæc erit proposita methodus: Ut semissis summæ terminorum rationis sinuum ad differentiam semissis ac termini alterius, sic tangens semissis summæ datæ peripheriarum ad tangentem peripheriæ, qua minor quæsitarum semisse summæ minor, aut major, major est. Welches er an einem Beyspiel so erweiset: Esto data summa arcuum FE, EG grad. 40: sitque data ratio sinuum harum peripheriarum, hoc est, ratio FH ad HG per 13. e. 5. [scilicet per 13. Lib. V. Geometriæ P. Rami: Si lineæ rectæ parallelis pluribus rectis intersecantur, intersegmenta sunt proportionalia; et contra], ut 7 ad 4. Quæruntur jam singulæ peripheriæ FE, EG. Ducantur radii, CF in terminum inscriptæ; CL bisecans ut inscriptam, sic summam peripheriarum. Erit ergo angulus FCP grad. 20; cujus tangens est FP. Illa datur ex canone 3639702; ex thesi $5\frac{1}{2}$: nam FG est 11; ergo FP $5\frac{1}{2}$. Jam ergo ut 3639702 ad 10000000, sic $5\frac{1}{2}$ ad 15 et paulo ultra; nempe remanent 809940. Jam PH est tangens anguli HCP; eaque datur in mensura ea, in qua CP radius est paulo ultra 15; datur,

inquam, nempe $1\frac{1}{2}$ differentia PP $5\frac{1}{2}$ et FH 7, vel differentia GP $5\frac{1}{2}$ et GH 4. Quare rursus ut CP datæ mensuræ ad radium, sic PH datæ mensuræ ad tangentem anguli HCP, hoc est arcus LE. Hinc jam sequitur calculus seu calculi ratio, quem ante proposuimus. Nam ut GP in data mensura $5\frac{1}{2}$ ad 3693702 in assumpta, tangentem scilicet anguli GCP, sic 15 + nempe CP in data mensura ad 10000 000; & ut 15 + ad 10 000 000, sic PH datæ mensuræ $1\frac{1}{2}$ ad 992 646 tangentem anguli PCH. Ex æquatione itaque rationum ut semissis terminorum rationis sinuum summæ ad differentiam semissis alteriusque termini, sic tangens semissis summæ datæ ad tangentem peripheriæ prostaphæreseos.

Und nun giebt er (p. 292. sqq.) über den Fall §. 75. die Belehrung, bloß mit beygefügter Anwendung auf zwey Beyspiele: §. 14. Superest jam adhuc alius casus; nempe datis dati anguli cruribus angulos ac tertium latus eruamus. Inventio hæc apud Regiomontanum est 49. Pr. I. ubi perpendicularem in alterutrum crurum inquirit & segmenta cruris secti. Est etiam 5. Pr. II. at nimis laboriosa & tædiosa. Quare ex superiori doctrina deducto calculo brevi et facili, eoque novo fruere. §. 15. Ut semissis summæ crurum ad differentiam summæ semissis alteriusque cruris, sic tangens semissis anguli crurum exterioris ad tangentem anguli, quo minor interiorum semisse dicti reliqui minor est, aut major, major.

§. 150.

Auf eine ähnliche Art wird diese Methode von Clavius in seinen 1586. herausgegebenen Triangula plana (a), ohne Erwähnung eines Vorgängers (b), vorgetragen.

a) Clavius hat die Herausgabe des in der Note zu §. 43. (S. 102.) angezeigten Werks, wovon die Triangula plana ein Stük sind, schon in der Vorrede zu seinen Gnomonices Libri octo (Romæ 1581. fol.) angekündiget. In demon-

strationibus, sagt er auf der 2. Seite derselben, ex Euclide & in eum scholiis secundum nostram editionem, ex Apollonio Pergæo, de conicis elementis secundum editionem Federici Commandini, & ex Theodosio de elementis sphæricis secundum etiam nostram editionem testimonia proferemus. Afferam etiam Joannis de Regiomonte libros de triangulis, aut Gebrum Hispalensem Arabem de triangulis sphæricis, aut nostra Triangula sphærica, quæ cum Theodosio et cum tractatione ac tabula de sinubus in volumen unum universæ astronomiæ pernecessarium conjecta brevi prodibunt. In dieser Ankündigung aber wird blos tractatio ac tabula de sinubus versprochen. Auch werden in den Gnomonices Libri octo durchaus blos sinus, sinus complementi, sinus versi, für den Halbmesser 100 000 zu den Berechnungen gebraucht; selbst da, wo Tangenten und Secanten dieselbe abkürzen würden. So wird in Lib. V. Prop. 2. p. 474. sq. die Proportion: ut sinus rectus altitudinis solis ad sinum complementi ejusdem altitudinis, ita gnomon ad umbram rectam. (Vgl. §. 14. Note b. S. 18.); und p. 476. sqq. eine nach derselben berechnete Tafel der Längen des Schattens in Zwölftheilen und Minuten der Länge des Stabs, für alle Grade und Minuten der Sonnenhöhe (vgl. §. 62. Note c. S. 133. f.) angegeben. Und mehrere sphärisch-astronomische Aufgaben, selbst die zwey, zu deren bequemerer Berechnung Regiomontanus seine Tabellam foecundam gebrauchte (§. 62. Note c. S. 130.), werden in Lib. II. Prop. 9. p. 189. sq. 191. blos durch Sinus aufgelöst; wozu hingegen in Clavii Astrolabium (Romæ 1593. 4o.) Lib. III. Canon. 4. 5. p. 601. 623. Tangenten angewendet werden. S. auch l. c. Canon. 7. 21. p. 642. 714. Diesemnach scheint Clavius um das Jahr 1581. Tangenten und Secanten noch nicht gekannt zu haben.

Als Erfinder derselben nennt er in den Vorreden der seiner Ausgabe des Theodosius beygefügten Abhandlungen über die Sinus, Tangenten und Secanten nur unbestimmt recentiores. So p. 99. sq.: Cum a paucis admodum sinuum demonstrationes sint explicatæ; operæ pretium me facturum arbitror, si, quanta potero brevitate ac perspicuitate, ex variis auctoribus, præsertim ex Ptolemæo, Purbachio, atque Joh. Regiomontano, demonstrationes colligam, quibus omnium arcuum sinus & chordas cognitas habeamus. — Quoniam vero recentiores summa facilitate ex sinubus alias lineas collegerunt, nimirum tangentes atque secantes, ut facilius quædam & brevius demonstrarent; de hisce etiam lineis agemus. Und p. 188:

Nämlich in Prop. 6. (p. 311.) schikt er ebenfalls die Aufgabe voraus: Dato aggregato duorum arcuum, vel duorum angulorum rectilineorum, quod minus quam grad. 180, una cum proportione, quam eorum sinus habent, utrumque illorum sigillatim exhibere notum; wovon er die Auflösung auch nur an einem Beyspiel, nämlich unter der Voraussetzung FEG = 130°, und FK : GI = 10 : 5, folgendermassen zeigt: Erit quoque FH : HG = 10 : 5. Posita igitur recta FH, 10; erit HG, 5: ac proinde tota FG, 15; utraque vero semissis FP, PG, $7\frac{1}{2}$; et denique HP, differentia inter semissem FP et majus segmentum FH, vel inter semissem GP et minus segmentum GH, erit $2\frac{1}{2}$. Rursus quia totus arcus FEG ponitur grad. 130: erit utraque semissis FL, LG grad. 65; ac proinde et uterque angulus FCL, LCG grad. quoque 65. Et quoniam ex iis, quæ ad initium tangentium secantiumque tradidimus, posito sinu toto CP, recta FP tangens est anguli FCP,

Quanquam astronomi omnia sua problemata atque theoremata per solos sinus explicare possint, ut communiter ab omnibus fieri solet; quia tamen multa facilius ac brevius expediuntur, si una cum sinubus lineæ tangentes secantesque adhibeantur — quas quidem lineas utili sane consilio recentiores excogitarunt atque in tabulas redegerunt: visum est has etiam lineas paucis exponere.

b) Clavius kannte wahrscheinlich Bressii Metrice astronomiæ, und Finkii Geometria rotundi (S. Anmerk. zu §. 43. und 71. S. 102. 151. 162. f.). Ob in jener die in Frage stehende Berechnungsart angegeben sey, weiß ich nicht. Hr. Hofr. Kästner (Gesch. d. Math. I. B. S. 628.) sagt: Das III. Buch derselben, von ebenen geradlinichten Dreyekken enthalte Auflösungen rechtwinklichter Dreyeke, erst nach Ptolemäus Methode, dann nach der neuern und des Verfassers seiner. Jene brauche Sinus, auch oft den Pythagoräischen Lehrsatz; Bressius, Sinus, Adscripten und Hypotenusen — Fragen der Art sehen z. Ex. Vergleichung zwischen Sonnenhöhe, Länge eines Stifts und seines Schattens. Auch so Ptolemäische und andere Methoden für schiefwinklichte ebene Dreyeke: aus den drey Seiten die Winkel, keine Ptolemäische Methode; die neuern, ohngefähr wie jezo in der gemeinen Trigonometrie verfahren wird.

et PH tangens anguli PCH: dabitur ex tangentium tabula tangens grad. 65, nempe FP, partium 214 451. Quare ut tangentem anguli LCE, nimirum HP inveniamus, dicemus per auream regulam: Si FP semissis aggregati terminorum proportionis datæ, nempe $7\frac{1}{2}$, dat FP tangentem semissis aggregati angulorum FCE, ECG, vel arcuum FE, EG, partium 214 451; quid dabit HP differentia inter semissem aggregati terminorum datæ proportionis et utrumlibet terminorum ejusdem proportionis, nimirum $1\frac{1}{2}$? inveniemusque tangentem HP partium 71 484 — Ex tabula ergo tangentium elicietur angulus HCP, h. e. arcus LE, grad. 35. min. 34: qui additus semissi FL grad. 65. componet arcum FE majorem, atque adeo angulum FCE, grad. 100. min. 34; ablatus vero ex semisse LG relinquet arcum minorem, et proinde angulum ECG, grad. 29. min. 26.

Worauf er unmittelbar den allgemeinen Schluß zieht: Itaque quando duo arcus simul minores sunt quam semicirculus, vel duo anguli simul duobus rectis minores; si fiat, ut semissis aggregati terminorum proportionis datæ ad tangentem semissis aggregati arcuum vel angulorum, ita differentia inter semissem aggregati terminorum datæ proportionis et alterutrum terminorum ad aliud: reperietur tangens arcus vel anguli, quo uterque arcus angulusve quæsitus a semisse aggregati eorundem differt. Additus igitur arcus vel angulus hujus inventæ tangentis ad semissem dabit majorem arcum vel angulum; sublatus vero ex eadem semisse relinquet arcum vel angulum minorem.

Und hieraus folgert er wiederum in Prop. 12. (p. 328. sq.) für die Aufgabe §. 75. blos nach vorausgeschickter Anwendung auf ein Beyspiel, die Regel: Si (ablato angulo ex grad. 180, ut summa aliorum duorum habeatur) fiat, ut semissis summæ duorum laterum datorum, nempe semissis summæ terminorum proportionis sinuum angulorum reliquorum, ad tangentem semissis

summæ reliquorum angulorum; ita differentia inter semissem summæ datorum laterum, h. e. terminorum proportionis sinuum angulorum reliquorum, & alterum laterum sive terminorum proportionis, ad aliud: reperietur tangens anguli, qui cum semisse summæ reliquorum angulorum componet majorem angulum, qui nimirum majori lateri dato opponitur; idem vero, ex eadem semisse dictæ summæ detractus relinquet angulum minorem, minori lateri dato oppositum: ut perspicuum est ex praxi priore Propos. 6.

§. 151.

Als zweyte Auflösung der Aufgabe seines 6ten Satzes beweißt Clavius (p. 312. sq.) auf eine ähnliche Art wie die erste: Si fiat, ut semissis differentiæ inter terminos proportionis datæ ad tangentem semissis differentiæ inter aggregatum datum & semicirculum, ita aggregatum ex semisse differentiæ inter terminos datæ proportionis & consequente ejusdem proportionis ad aliud; invenietur tangens anguli, a quo si dematur semissis differentiæ inter datum aggregatum & semicirculum, reliquus erit angulus seu arcus minor quæsitus; qui detractus ex aggregato dato relinquet majorem angulum sive arcum quæsitum. Welches auf die Aufgabe §. 75. 81. angewendet mit der dritten Proportion §. 85. (S. 185. fig. 29. 30.)
$AB-AC : AB+AC = Tg.\frac{1}{2}BAC : Tg.(\frac{1}{2}BAC+ABC)$*) zusammentrifft.

*) Diese kann auch, wie in Traité de Trigonometrie rectiligne & spherique — par M. Cagnoli (Paris 1786. p. 117.) geschieht, so ausgedrükt werden:

$$AB-AC : AB+AC = Tg.\frac{1}{2}BAC : Cotg.\frac{ACB-ABC}{2}$$

weil $\frac{ACB+ABC}{2} = 90^\circ - \frac{1}{2}BAC$

daher $\frac{ACB-ABC}{2} = \frac{ACB+ABC}{2} - ABC$

$= 90^\circ - (\frac{1}{2}BAC+ABC)$.

In seinem Astrolabium (Romæ 1593. p. 267.) aber, und in seiner Geometria practica (Mogunt. 1606. p. 47.) giebt Clavius ohne Beweis, mit Verweisung auf Prop. 6. seiner Triangula plana, zum Behuf der Aufgabe §. 75. 81. die Regel: Ut semissis aggregati duorum laterum datorum ad tangentem semissis arcus, qui detracto dato angulo ex semicirculo relinquitur, ita differentia inter semissem aggregati duorum laterum datorum & utrumlibet laterum ad tangentem differentiæ inter semissem arcus prædicti & alterutrum angulorum non datorum; welche auf die zweyte Proportion §. 85. hinauslauft,

$$AB+AC : AB-AC = \text{Cotg.}\tfrac{1}{2}BAC : \text{Cotg.}(\tfrac{1}{2}BAC+ABC).$$

§. 152.

Lansberg in seiner 1591. herausgegebenen Triangulorum geometria (Lib. III. §. 15. p. 162. sq.) befolgt nur mit einiger Veränderung des Ausdruks, den §. 149. angeführten Vortrag von Fink, ohne diesen zu nennen.

§. 153.

Vieta in seinen vor dem Jahr 1595. wo nicht herausgegebenen, doch verfaßten Variorum de rebus mathematicis responsorum Liber VIII. a) 19tem Capitel, Pro-

Eben daselbst ist auch die erste Proportion §. 85. angegeben:

$$AB.\ AC : AB - AC = \text{Cotg.}\tfrac{1}{2}BAC : \text{Tg.}\frac{ACB-ABC}{2}.$$

a) Vieta führt es selbst zu Ende seines Psevdo-mesolabum & alia quædam adjuncta capitula (Vietæ Opera mathematica. Lugd. Bat. 1646. p. 285.) mit folgenden Worten an: Quam teneant latera polygonorum accuratam inter se rationem, mysterium est, quod aperui in Analyticis angularium sectionum, & adnotavi παραγραφα in Libro variorum de rebus mathematicis responsorum octavo, nämlich Cap. XVIII. (Opp. p. 398. sqq.). Ludolph van Ceulen aber führt in seinen Fundamenta arithmetica & geometrica, in Latinum conversa a Willebr. Snellio (Lugd. Bat. 1615.), Libr. IV. Probl. 3. p. 141. des Vieta Auflösung der Aufgabe: Aus vier gegebenen geraden Linien ein

χωρον seu ad usum mathematici canonis Methodica betitelt (Opp. p. 400—432.) b), ſtellt p. 402. für den Fall, Trianguli cujuscunque plani datis cruribus ac verticis angulo, (nach Vorausſchickung der zwey Lehrſätze: Dato angulo, qui ad verticem existit, datur summa angulorum ad basin; ea enim æqualis est angulo exteriori ad verticem; und Data summa angulorum ad basin, & differentia eorundem, dantur anguli ad basin singuli; enimvero dimidia differentia duarum magnitudinum adjecta dimidiæ summæ earundem efficit magnitudinem majorem, ablata minorem) in ſeinen Benennungen (Note b. zu §. 71. S. 163.) die Regel §. 81. auf, ohne Beweis wie die übrigen: Ut aggregatum crurum ad differentiam eorundem, ita prosinus dimidiæ summæ angulorum ad basin ad prosinum dimidiæ differentiæ.

§. 154.

Noch giebt Vieta (p. 403.) für eben dieſen Fall den aus der Auflöſungsart §. 78. (vergl. §. 125. n°6; §. 126;

Viereck verzeichnen, das ſich in einen Kreis beſchreiben laſſe, welche er in dem erſten der ſeinem Pseudo-mesolabrum beygefügten Capitula (Opp. p. 275. sqq.) gegeben hat, mit den Worten an: Cum jam olim ante complures annos illud haud difficulter e. 22. Prop. III. Lib. Eucl. observassem, angulos oppositos quadrilateri in circulum inscripti duobus rectis æquari; atque hic me multum excruciassem; modo hanc, modo istam viam tentando, ut aliquo saltem modo propositum problema solverem: fateor, me irrito conatu omnia expertum, neque quidquam profecisse. Idem tamen toties a me frustra tentatum clarissimus, & subtilissimus ille Franciscus Vieta — solvit; cujus demonstrationem ex ipsius Libro, quem anno 1595. Parisiis publicavit, hic adscribam.

b) Deſſen Inhalt Vieta (p. 400.) mit den Worten angiebt: Dum renovatur meus ad canonem inspectionum liber (Note a. zu §. 71. S. 148.), analyticæ meæ methodi, qua soleo expedire me a triangulis planis ac sphæricis, ultro copiam facio.

§. 127. n°1; §. 135; §. 144. n°3; §. 146.) für die Tangenten der übrigen Winkel folgenden allgemeinen Ausdruk (§. 90. 97. 99. ff.) so an: Ut crus primum ad crus secundum, ita transsinuosa complementi anguli verticis ad aliam rectam; cujus effectæ analogæ & prosinus complementi anguli verticis aggregatum vel differentia erit prosinus complementi anguli a crure primo subtensi: aggregatum videlicet, cum angulus, qui ad verticem existit, proponitur obtusus; differentia, cum acutus: & hoc quidem casu, si prosinus complementi anguli verticis minor fuerit factâ analogâ, angulus, cui crus primum subtenditur, erit acutus; &, si major, obtusus; sed si æqualis, rectus.

§. 155.

Pitiscus in seinen zuerst 1599. herausgegebenen Trigonometriæ Libri quinque (Note a. zu §. 71. S. 151.) l ib. lll. Ax. 3. p. 90. sqq. der zweyten Ausgabe Aug. Vind. 1608.) trägt den Satz §. 148. nicht besonders vor; sondern flicht den Beweis desselben, den er mittelst ausführlicherer Construction (ungefähr wie §. 83.) anschaulicher und allgemeiner darzustellen sucht, gleich in den Beweis des Satzes ein: Ut summa duorum laterum ad differentium eorundem, ita tangens dimidii summæ duorum angulorum oppositorum ad tangentem differentiæ infra vel supra dimidium.

Descripto enim quadrante [circulo] statuantur (*Fig.* 33.) anguli FCE, FCG angulis ACB, B (*Fig.* 26. 27.) æquales; ac proinde sit summa duorum illorum angulorum angulus FCG. Dimidium illius summæ sit FCL vel LCG: differentia anguli FCE supra dimidium FCL; vel anguli ECG infra dimidium LCG, sit angulus LCE. Subtensa summæ duorum angulorum sit recta FG; sinus anguli majoris FCE sit recta FK; sinus anguli minoris ECG sit recta GI: tangens dimidiæ summæ duorum angulorum sit LM vel LO; tangens differentiæ infra vel supra dimidium sit LN.

Jam triangula FKH, GlH sunt æquiangula, propter æquales FHK, GHl, & rectos ad K, l: ergo ut HF ad FK, ita HG ad Gl (*Fig.* 33.); sicut in *Fig.* 26. 27. ut AB ad sin. ACB, ita AC ad sin. B. Latera igitur FH et HG prorsus eandem habent rationem in *Fig.* 33., quam latera AB et AC in *Fg.* 26. 27. Quare rectam FG pro summa duorum laterum AB et AC; partes vero FH, HG pro ipsis duobus lateribus AB, AC assumere licet. Quo posito, HQ est differentia duorum laterum. Latera autem, ibi AB et AC, hic FH et HG, data sunt. Data igitur est etiam differentia eorum laterum HQ; & ejus differentiæ dimidium HP.

Porro quia triangula CMO & CFG sunt undique æquiangula, propter parallelas MO & FG; ideo & latera & laterum segmenta habent proportionalia: ac proinde ut FG summa duorum laterum ad HQ differentiam eorundem, ita MO dupla tangens dimidii summæ duorum angulorum ad NR duplam tangentem differentiæ infra vel supra dimidium; vel ut FP dimidium summæ duorum laterum ad HP dimidium differentiæ eorundem, ita LM tangens dimidii summæ duorum angulorum oppositorum ad LN tangentem differentiæ infra vel supra dimidium; vel (retentis prioribus quidem duobus proportionis terminis integris, posterioribus vero dimidiatis, compendiosioris calculi gratia) ut FG summa duorum laterum ad HQ differentiam eorundem, ita LM tangens dimidii summæ duorum angulorum oppositorum ad LN tangentem differentiæ infra vel supra dimidium. Nam ut totum ad totum, ita pars ad partem.

§. 156.

Snellius in Doctrinæ triangulorum canonicæ (Lugd. Bat. 1627. S. Note b. zu §. 71. S. 159.) Lib. II. Prop. 13. (p. 78. sq.) ſchiſt noch den Saß voraus: Ut summa sinuum ad differentiam eorundem, ita tangens dimidiæ summæ peripheriarum ad tangentem dimidiæ

earumdem differentiæ; fügt demſelben (p. 79. sq.) das Consectarium bey: Data ratione sinuum, & vel summa vel differentia peripheriarum, dantur singulæ; quod enim in ipsis sinibus verum est, hoc in eorundem homologis terminis quoque verum erit; und begründet (p. 80.) die Anwendung davon auf Prop. 14: Datis duobus trianguli lateribus & angulo ab ipsis comprehenso dantur anguli reliqui, durch die Bemerkung: Nam datis cruribus trianguli datur ratio sinuum, qui ad angulos oppositos pertinent.

Dieſe Anwendung ſowohl, als die von Prop. 13. auf das Consectarium, zeigt er an Beyſpielen; den 13. Satz aber beweißt er folgendermaſſen: Sunto (*Fig.* 33.) expositarum peripheriarum GE, EF sinus GI, FK; subtensa utrique pariter FG, secta a communi radio CE in H; & perpendicularis in eam sit CP; & rectæ PH æqualis PQ. Erit igitur HCP angulo PCQ æqualis; & QCF æqualis dato GCH. Quare HCQ angulus differentiæ inter GCH hoc est QCF & FCH bisectus est ab CP: & tangens dimidiæ summæ FP, si radius assumatur CP; & dimidiæ differentiæ PH. Cum igitur triangula GHI, FHK ob sinus parallelos sint similia; erit GI ad FK ut GH ad HF. Ergo etiam componendo & dividendo ut summa sinuum GI, FK ad differentiam eorundem, ita GH et HF id est GF ad HQ earundem differentiam; et ita quoque harum dimidia FP ad PH. —

§. 157.

Gellibrand in Trigonometriæ Britannicæ (Goudæ 1633. S. Note a. zu §. 71. S. 155.) Lib. II. P. I. De triangulis planis. Prop. 4. (p. 62. sq.), Cavalieri in Trigonometriæ planæ (Bonon. 1643. S. Note a. zu §. 69. S. 140.) Ax. 3. (p. 18. sq.), Oughtred in Trigonometriæ (Lond. 1657. 40.) Cap. II. §. 6. (p. 16. sq.) beweiſen den Satz §. 81. f., den ſie theils wie Vieta (§. 153.), theils wie Pitiſcus (§. 155.) ausdrücken,

ohne Zurükführung auf den Satz §. 148. u. mittelbar auf eine der §. 81. dargestellten ähnliche Art.

Gellibrand schneidet (*Fig.* 29. 30.) noch AK=AC =AF von AB ab; zieht KO durch K parallel mit BC, AG; wodurch GO=FG=CH, daher CO=CG-$\left\{\begin{matrix}GO\\CH\end{matrix}\right\}$ =GH wird; und folgert

$$FB : BK = FC : \left\{\begin{matrix}CO\\GH\end{matrix}\right\} = FE : EG$$

d.i. $BA+AC : BA-AC = Tg.\frac{ACB+B}{2} : Tg.\frac{ACB-B}{2}$

Cavalieri schneidet auch AK=AC=AF von AB ab; folgert aber, mit Weglassung von KO,

$$BF : FA = CF : FG$$

$$BF : \left\{\begin{matrix}2FA\\FK\end{matrix}\right\} = CF : \left\{\begin{matrix}2FG\\FG+CH\end{matrix}\right.$$

und nun (El. V, 19. Zus.) FB:BK=CF:GH=FE:EG.

Oughtred halbirt BF in N; zieht NE, die also parallel ist mit BC (El. VI, 2.) und mit AG (I, 30); und schließt

$$\left.\begin{matrix}FN : NA\\\frac{BA+AC}{2} : \frac{BA-AC}{2}\end{matrix}\right\} = FE : EG; \text{ u. s. w.}$$

§. 158.

Mit Weglassung des Halbkreises FCK (*Fig.* 31. 32.), steht der Beweis §. 82. in Vincentii Wing Astronomia Britannica (Lond. 1669. fol.); Lib. II. Trigonometria; Cap. II. §. 3. p. 17. sq.

§. 159.

Kepler (Tabulæ Rudolphinæ Ulmæ 1627. Præcepta. Cap. 9. p. 21. sq.) schlägt für den Fall §. 84. vor, der Winkel ACB und B gegebene Summe *Fig.* 26. 27. auf gerathewohl in zwey ungleiche zu theilen; aus dem aus

genommenen gröſſeren den kleineren nach §. 24. (a) zu berechnen; den berechneten Werth des kleineren, wenn er von dem angenommenen Werthe deſſelben abwiche, ſtatt dieſes zu ſetzen, und von der gegebenen Summe abzuziehen; mittelſt dieſes entſprechenden gröſſeren wieder den kleineren nach §. 24. (a) zu berechnen; und dieß ſo lang fortzuſetzen, bis ein dem zuletzt angenommenen kleineren gleicher Winkel herauskomme.

Zu Beſchränkung der erſten Annahme des kleineren Winkels giebt er

1) die allgemeine Anweiſung, vorderſamſt den ſpitzen Winkel φ zu berechnen, deſſen Lg. sin. = Lg. $\frac{AC}{AB}$ + sin. tot. Fände ſich nun $\varphi + 90° =$ der gegebenen Summe, ſo wären die Winkel $B = \varphi$, und $BAC = 90°$. Widrigenfalls ſey immer der Winkel $B < \varphi$ (b).

2) Bemerkt er noch beſonders für den Fall (*Fig.* 26.), wenn der gegebene Winkel BAC ſpitz iſt: daß der geſuchte kleinere Winkel $B < BAC$, wenn der Winkel $\varphi < 30°$ (c): hin-

a) Nach welchem Lg. sin. B. = Lg. $\frac{AC}{AB}$ + Lg. sin. ACB.

b) Wird nämlich über AB ein Halbkreis, und aus A mit dem Halbmeſſer AC ein Kreisbogen beſchrieben, ſo berührt dieſen die von B an den Durchſchnittspunkt deſſelben mit dem Halbkreis gezogene gerade Linie (El. III, 31. 16.); und macht mit BA einen gröſſeren Winkel (und zwar den oben φ genannten) als jede andere von B an einen andern Punkt jenes Kreisbogens gezogene und denſelben ſchneidende gerade Linie.

c) Oder $= 30°$: d. h. wenn AC $\left\{\begin{matrix}\leq\\=\end{matrix}\right\}$ $\frac{1}{2}$ AB; folglich (El. I, 20.) BC $\geq$ $\frac{1}{2}$ AB $\geq$ AC.

d) Dieſe Bemerkung iſt nicht allgemein richtig. Z. B. für $BAC = 54° 30'$, AB = 40, AC = 33, Lg. $\frac{AC}{AB} = 9{,}9164530 - 10$, wird der Winkel φ ſehr nahe $= 55° 35' \frac{1}{4}$, noch etwas gröſſer; und doch der Winkel B nur etwas weniges gröſſer als $52° 12' \frac{1}{6}$. Ueberhaupt ſoll in dieſem Fall (fig. 26.) der

hingegen B > BAC, wenn φ > beydes als 30° und als BAC (d); und zwar alsdenn B um so weniger von φ unterschieden sey, je mehr φ sich 45 Graden nähere.

Noch sezt er hinzu: In medio processu facile videt quilibet, in positione nova non adeo rigide inhærendum esse ei, quod emergit — Nam apparet statim in secunda repetitione, veritas ubi sit, num inter duas positiones — an ultra illas — Breviter si vel parva accedat exercitatio; mira celeritate, nec ulla memoriæ solicitatione graviori quæsitum angulum minorem assequimur. —

§. 160.

Whiston (Prælectiones astronomicæ. Cantabrig. 1707.) berechnet p. 303. 307. zwey Beyspiele nach der §. 84. angegebenen Art, die er methodum Streetianam nennt. Le Monnier (Institutions astronomiques. Paris 1746.) trägt eben dieselbe ohne Beweis vor in einer Anmerkung p. 552. als methode de Street demontrée dans les Tables Carolines. Hr. Hofr. Kästner (Geometr. Abhandl. 1 Samml. Götting. 1790. S. 153. f.) fügt der analytisch-trigonometrischen Deduction derselben aus der Proportion §. 81. die Nachricht bey: „Die Aufgabe (aus zwo Seiten eines Dreyeks nebst dem Winkel, den sie einschliessen, die übrigen Winkel zu finden, daß man nur der gegebenen Seiten Logarithmen braucht, nicht die Zahlen selbst) findet sich in Astronomia

Winkel B > A, AC > BC, $AC^2 > AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \frac{\text{cosin. A}}{\text{sin. tot.}}$ (§. 76.) seyn: so muß $2AB \times AC \frac{\text{cosin. A}}{\text{sin. tot.}} > AB^2$; $AC \frac{\text{cosin. A}}{\text{sin. tot.}} > \frac{1}{2}AB$; $\frac{AC}{AB} > \frac{1}{2} \cdot \frac{\text{sin. tot.}}{\text{cosin. A}}$; $\frac{AC}{AB}$ sin. tot. $> \frac{1}{2} \frac{\text{sin. tot.}^2}{\text{cosin. A}}$; sin. φ > $\frac{1}{2}$sec. A (§. 72.) seyn; daher zwar 1) sin. φ > $\frac{1}{2}$ sin. tot.; φ > 30°; aber 2) nicht nur φ > A, sin. φ > sin. A; sondern sin. φ > $\frac{1}{2}$ sec. A; Lg. $\frac{AC}{AB}$ + 10,3010300 > Lg. sec. A.

In dem vorigen Beyspiel ist Lg. $\frac{AC}{AB}$ + 10,3010300 = 10,2174830;
aber Lg. sec. A = 10,2360460.

Carolina — a Thoma Streete — Ex idiomate Anglico in Latinam linguam transtulit Jo. Gabr. Doppelmayr. Nürnb. 1705. 4°. S. 41. Str. giebt da Robert Anderſons *) Beweis, der noch nicht ſey bekannt gemacht worden." Von dem Engliſchen Original ſagt Weidler (Hist. Astron. p. 504.): A. 1661. Londini 4. Thomas Streete Anglice scripsit A new theory of the cœlestial motion, seu novam theoriam motuum cœlestium, h. e. Astronomiam Carolinam, Carolo II. Magnæ Britanniæ regi consecratam; auctius a D. Halleio editam Lond. 1710.

In Wings Astronomia Britannica (l. §. 158. cit. §. 10. p. 23.) iſt dem Vortrag des Verfahrens §. 84. folgender Beweis, mit der Anzeige: Robertus An-

*) Wahrſcheinlich des nämlichen, von welchem Montucla (Hist. des Math. Nouv. Edit. T. II. p. 89.) folgende Nachricht giebt: Voici maintenant un géomètre, dont l'exemple prouve, que le goût & le génie de la géométrie sont de tous les états: c'est Robert Anderson, simple fabricant d'étoffes de soie, à Londres; mais l'exercice de sa profession ne l'empêcha pas de se rendre asses habile en géométrie, pour publier deux ouvrages plus qu'élémentaires en ce genre. L'un est intitulé: Stereometrical propositions variously applicables, but specially intended to gauging (Lond. 1668. 8o.); l'autre: Gauging promoted, being an Appendix to Stereometrical propositions (Lond. 1669. 8o.). Dans ces deux ouvrages Anderson considère la solidité des différens segmens de cônes, conoïdes & sphéroïdes, coupés & recoupés en divers sens par un plan; ce qu'il applique à la mesure des différens vases Anglois, pleins ou vides en partie. On lui rend dans les Transactions philosophiques la justice de dire, qu'ils contiennent des nouveautés en ce genre. Vergl. Acta philosophica societatis reg. in Anglia anni MDCLXVIII. Auctore Henr. Oldenburgio. Amstelod. 1674. p. 317. sqq.

Beughem (Bibliographia mathematica. Amstelod. 1688. p. 317. sq.) führt auſſer jenen zwey Schriften noch an: Robert Anderson, Genuine use and effects of the Gun as well experimentally as mathematically demonstrated &c. with exact tables of projections. Lond. 1667. in 4.

derson rem ita demonstrat, beygefügt: Von des Dreyeks BAC (*Fig.* 74.) gröſſeren gegebenen Seite BA und ihrer Verlängerung ſchneide man (wie in fig. 29. 30. ff.) AK = AF = der gegebenen kleineren AC ab; beſchreibe auf BA (wie in *Fig.* 34.) das rechtwinklichte Parallelogramm BARV, deſſen Seite AR auch = AC; ziehe FR, und verlängere ſie, bis ſie die verlängerte BV in O ſchneidet; lege durch K die Parallele KN mit AR, BV; und ziehe AV, AN, KR, KO.

So iſt (I, 29. VI, 4.) FA : RV = FR : RO;
oder (conſtr. und I, 4.) AR : RV = KR : RO.

Da nun auch die Winkel ARV, KRO, als rechte, gleich ſind (KRO nämlich beſteht aus zwey Winkeln, deren jeder die Hälfte eines rechten iſt zufolge I, 5. 32. 29.): ſo ſind (VI, 6.) die Dreyeke ARV, KRO gleichwinklicht; und namentlich der Winkel RAV = RKO. Aber auch RAN = RKN, jeder = $\frac{1}{2}$ rechten (I, 5. 32.). Daher der Winkel NAV = NKO (El. Ax. 3.) = KOB (I, 29.).

Nun ſind aber AR : RV
d. i. AC : AB } = sin. tot. : Tg. RAV (§. 64.)

und Tg. FOB : Tg. KOB
d. h. Tg. 45° : Tg. NAV
oder (§. 92.)
sin. tot. : Tg. (RAV - 45°) } = { FB : KB (§. 63.)
AB + AC : AB - AC (conſtr.)
Tg. $\frac{C+ABC}{2}$: Tg. $\frac{C-ABC}{2}$ (§81.)

Der §. 84. gegebene Beweis ſteht in der Astronomie par La Lande (2de Edit. Paris 1771. T. III. §. 3643. p. 676; 3me Edit. 1792. T. III. §. 3850. p. 545.).

Ein auf eine andere Conſtruction gegründeter Beweis ſteht in La Caille Lectiones elementares mathematicæ — in Latinum traductæ & ad editionem Parisinam anno 1759. denuo exactæ (Vienne 1762.), §. 752. p. 177. sq.

§. 161.

Die Conſtructionen und Beweiſe §. 81. ff. laſſen ſich auch auf ungleichſchenklichte rechtwinklichte Dreyeke anwen-

den. In dieſen iſt aber die halbe Summe der zwey ſpizen Winkel = 45° (I, 32.); folglich (§. 80.) derſelben halber Unterſchied = dem Ueberſchuß des gröſſeren über 45°, oder dem Ueberſchuß von 45° über den kleinern.

Daher (*Fig.* 34.) AB+AR : AB-AR

$$= \left\{\begin{matrix}\text{Tg. } 45° \\ \text{s.t. } (\S.92.)\end{matrix}\right\} : \text{Tg. } (ARB-45°) \text{ od. Tg.} (45°-ABR)$$

und, wenn AR = AC,

$$\text{sin. tot.} : \left\{\begin{matrix}\text{Tg.}(ARB-45°) \\ \text{Tg.}(45°-ABR)\end{matrix}\right\} = AB+AC : AB-AC$$

$$= \text{Tg.} \frac{C+ABC}{2} : \text{Tg.} \frac{C-ABC}{2} (\S.81.);$$

wobey (§. 64.) $\left\{\begin{matrix}AR \\ AC\end{matrix}\right\}$: AB = sin. tot. : Tg. ARB

$$AB : \left\{\begin{matrix}AR \\ AC\end{matrix}\right\} = \text{sin. tot.} : \text{Tg. ABR.}$$

So führt Playfair (Elements of geometry, containing the first six Books of Euclid, with two Books of the geometry of solids: to which are added Elements of plane and spherical Trigonometry. Edinburgh 1795. Elements of plane Trigonometry. Prop. III. Cor. 2. p. 289. und Prop. VI. p. 292. sq.) die Regel §. 84. nach der zweyten hier bemerkten Art ausgedrukt auf §. 81. zurük; nachdem er den Saz §. 83. mittelſt einer von den §. 83. 149. f. 155. f. erwähnten verſchiedenen Conſtruction bewieſen hat.

Obige zweyte Art des Ausdruks der Regel §. 84. folgt übrigens ebenfalls aus der dortigen Conſtruction; indem der Winkel BRS auch (§. 32.) $= \left\{\begin{matrix}AKR \\ 45°\end{matrix}\right\}$ - ABR iſt.

Anwendung des Verfahrens nach den Proportionen

AB : AC = sin. tot. : Tg. ABR

$$\text{sin. tot.} : \text{Tg.} (45° - ABR) = \text{Tg.} \frac{C+ABC}{2} : \text{Tg.} \frac{C-ABC}{2}$$

findet sich in Kästners Geometr. Abhdl. I. Samml. (Göttingen 1790.) S. 394. f.

Da $45°-ABR = 90°-(45°+ABR)$, also $Tg.(45°-ABR) = Cotg.(45°+ABR)$:

so ist auch sin. tot. : Cotg. $(45°+ABR) = AB+AC : AB-AC$

und (§. 67.) sin. tot. : Tg. $(45°+ABR) = AB-AC : AB+AC$

$= Tg.\frac{1}{2}BAC : Cotg.\frac{C-ABC}{2}$ (§. 85. u. Note zu §. 151.)

wenn AB : AC = sin. tot. : Tg. ABR

So gibt Cagnoli (Traité de Trigonometrie. p. 117.) diese Berechnungsart an.

§. 162.

Statt daß Geber (§. 127. n°. 3.), Regiomontanus (§. 134.) in dem Fall, wenn die drey Seiten eines ungleichseitigen Dreyeks gegeben sind, immer das auf eine Seite gefällte Loth (wie CD *Fig.* 11. 12; AE *Fig.* 16.) und alsdenn mittelst desselben die Winkel des Dreyeks berechnen: bleibt Rhäticus (De triquetris rectarum linearum in planitie p. 102. sq.) bey der Berechnung des einen der Segmente CE, BE (*Fig.* 16.), und zwar des ersten nach §. 39, des zweyten nach El. II. 13. stehen; und folgert daraus (wie in §. 30. f. 38.) den Cosinus, oder, nach seiner Benennungsart, die Basis des einen der Winkel C, B. Worauf er den andern mittelst der allgemeinen Regel §. 10. 13, und den dritten nach El. I, 32. finden lehrt.

§. 163.

Vieta (l. c. §. 153.) p. 402. drükt die aus diesem Verfahren sich ergebende allgemeine Regel (§. 40. ff.) so aus: Ut duplum rectangulum sub cruribus ad differentiam inter quadrata crurum simul juncta et quadratum basis, ita sinus totus ad sinum complementi anguli ad verticem. Et si quidem quadratum basis cedit quadratis crurum simul junctis, erit angulus,

qui ad verticem existit, acutus; si præstat, obtusus; sed, si æqualia fuerint, rectus.

Snellius (l. c. Note b zu §. 71. S. 159. Lib. II. Prop. 12. n°. 2. p. 73. sq.) führt sie nach Vieta an (Proposuit Vieta, nos ita demonstramus); und beweißt sie für sin. ACD oder sin. compl. CAD (*Fig.* 11. 12.) auf die §. 40. vorgetragene Art.

§. 164.

Die für diesen Fall in §. 48. 50. angegebene Art des Dreyecks Fläche unmittelbar aus seinen Seiten zu berechnen, lehrt Frater Lucas de Burgo sancti sepulcri Ordinis minorum, der sich sonst auch Lucas Patiolus Burgensis Minoritanus nennt (Kästners Gesch. d. Math. I B. S. 418. f.) in seiner zu Venedig 1494. herausgegebenen Summa de Arithmetica, Geometria, proportioni e proportionalita (Kästner a. a. O. S. 65 — 82.), nämlich in des Tractatus Geometriæ Distinctio prima, Capitulum septimum: De dimensione omnium triangulorum (Fol. 9. b.). mit folgenden Worten: E accio che perfetta dottrina in questo libro fia a misurare e triangoli, e da mostrare, comme ciascuno triangolo senza investigatione del catetto si possa misurare. Li lati de ciascun triangolo agiongni insiemi, e di quel toglia la mita; del qual trae per ordine e lati del triangolo: e multiplica lavanço de lun lato per laltro avanço de laltro lato; e la somma per lavanço de laltro lato multiplica; e tutto multiplicarai per la mita de 3 lati; e de la somma truova la radici: laqual radici fia larea del detto triangolo.

Der Beweis, den er in dem folgenden, Qualiter inveniantur catheti sive perpendiculares cujuscunque trianguli überschriebenen Capitel (Fol. 11.) davon giebt, ist nur der Form nach von der Deduction derselben §. 48. verschieden.

Mit Weglassung der *Fig.* 18. beschriebenen Kreise halbirt er nur 1°. die Winkel ABC, ACB durch die in S sich

schneidende gerade Linien BS, CS; fällt aus S die Perpendikel SD, SL, SK auf die Seiten des Dreyeks; und zieht AS: beweißt alsdenn (nach El. I, 26.), daß SD = SL = SK, BD = BL, CK = CL; und (mittelst des Satzes: daß zwey rechtwinklichte Dreyeke gleich und ähnlich sind, wenn ihre Hypotenusen und ein Cathete gleich sind) daß auch AD = AK, und der Winkel DAS = KAS.

Da also $\begin{matrix} AD = AK \\ DB = BL \\ CL = CK: \end{matrix}$

folgert er $AB + CL = AC + BL = \frac{AB+BC+CA}{2} = \frac{1}{2}$ Perimeter

$$\left.\begin{matrix} CL \\ CK \end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{2}\text{Perim.} - AB$$

$$\left.\begin{matrix} BL \\ BD \end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{2}\text{Perim.} - AC$$

$$\left.\begin{matrix} AD \\ AK \end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{2}\text{Perim.} - BC;$$

weil auch $AB + CL = AD + \left\{\begin{matrix} DB \\ BL \end{matrix}\right\} + LC = AD + BC = \frac{1}{2}$ Perim.

2°. Schneidet er $BF = CL$, $CH = BL$ auf den verlängerten AB, AC, ab: so daß

$\left.\begin{matrix} AF = AB + CL \\ AH = AC + BL \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}$ Perim. (n° 1.); folglich $AF = AH$.

3°. Zieht er FG senkrecht auf AF; verlängert AS, bis sie dieselbe in G schneidet (welches er aber nicht deutlich angiebt); und zieht GH: wodurch (El. I, 4.) auch der Winkel $AHG = AFG = Rect$, und $GH = GF$ wird.

4°. Schneidet er $BM = \left\{\begin{matrix} CL \\ BF \end{matrix}\right.$ von BC ab; so daß auch $CM = \left\{\begin{matrix} BL \\ H \end{matrix}\right.$: und zieht GM, GB, GC. Worauf er folgert: $\left.\begin{matrix} CG^q = CH^q + GH^q \\ BG^q = BF^q + GF^q \end{matrix}\right\}$ (n°. 3. und I, 47.)

$CG^q - BG^q = CH^q - BF^q$ weil $GH = GF$ (n°. 3.)
$= CM^q - BM^q$ (n°. 4.)
$CG^q - CM^q = BG^q - BM^q$:

folglich GM auf BC senkrecht; welches er durch Unmöglichkeit des Gegentheils erweiset.

Ferner sind in den rechtwinklichten Dreyeken GFB, GMB (deren Hypotenuse GB gemeinschaftlich, und die Seiten BF = BM) die Winkel FGB = MGB = $\frac{1}{2}$FGM: und in dem Vierek GFBM, dessen Winkel bey F und M rechte sind, die Winkel FGM + FBM = 2Rect. = DBL + FBM (I, 13.); mithin FGM = DBL, $\frac{1}{2}$FGM = $\frac{1}{2}$DBL, d. i. FGB = DBS: daher (VI, 4.) Dreyek GFB ∽ BDS; GF : FB = BD : DS; und (VI, 16.) GF × DS = FB × BD.

Aber AD : AF = SD : GF (VI, 4.)
= SD² : $\begin{cases} GF \times DS \\ FB \times BD \end{cases}$ (VI, 1.)

folglich AF × SD² = AD × FB × BD
AF² × SD² = AD × FB × BD × AF
= AD × CL × BD × AF (n°. 2.):

und, weil das Dreyek

$$ABC = SD \times \tfrac{1}{2}AB + \begin{cases} SL \times \frac{1}{2}BC + SK \times \frac{1}{2}AC \\ SD \times \frac{1}{2}BC + SD \times \frac{1}{2}AC \end{cases}$$
$$= SD \times \frac{AB + BC + CA}{2} = SD \times AF \text{ (n°. 2),}$$
$$\Delta ABC^2 = AD \times CL \times BD \times AF$$
$$= (\tfrac{1}{2}\text{Perim.} - BC)(\tfrac{1}{2}\text{Perim.} - AB)(\tfrac{1}{2}\text{Perim.} - AC)\tfrac{1}{2}\text{Perim.}$$
(n°. 1. 2.)

§. 165.

Satz und Beweis stehen ebenso in La quarta parte del general Trattato dé numeri et misure di Nicolo Tartaglia (In Venetia 1560.), Libro primo, fol. 7. sqq.; etwas abgekürzt in Petri Rami Scholarum mathematicarum Libri unus et triginta (Francof. 1599. Zuerst Basil. 1569.) p. 313. sq.; mit einer Aenderung in Beziehung auf den Beweis, daß GM auf BC senkrecht sey, in Clavii Geometria practica (Mogunt. 1606.) Lib. IV. Cap. II. p. 158. sqq.; nach Clavius übersezt in

Schwenters Geometriæ practicæ novæ Tractatus II. (Nürnb. 1618.), III Buchs 5te Aufg. S. 101. ff.; wie bey Clavius, in Andr. Tacquet Geometriæ practicæ Lib. II. Probl. 6. p. 73. sqq. (Opp. mathematica. Antverp. 1669.).

Nach einem von Hrn. Prof. Pfaff in Helmstädt mir mitgetheilten Auszug aus Libro de Algebra en Arithmetica e Geometria, compuesto por Pedro Nunnez (En Anvers 1597.) fol. 249. sqq. beschwehrt sich Nonius sehr über die beynahe unverständliche Dunkelheit des Beweises des Frater Lucas de Burgo; und führt denselben, mittelst Beschreibung des Kreises in das Dreyek ABC, weitläuffig, übrigens auf die ähnliche Art, wie Frater Lucas, aus.

Oughtred in seinem Clavis Mathematicæ (Oxon. 1667. zuerst Lond. 1631.) Cap. XVIII. Penus analytica betitelt, Theor. 20. p. 71. sq. kürzt hingegen eben diesen Beweis, auch mit Weglassung wesentlicher Stüke, sehr ab; und endiget denselben so:

$$\left.\begin{array}{l} SD : AD = FG : AF \\ SD : DB = BF : FG \end{array}\right\} \text{propter triang. sim.}$$

Quare per multiplic. $SD^2 \times AF = AD \times DB \times BF$.

Ducatur utraque pars in AF; eritque ——

§. 166.

Der Satz, ohne Beweis, nur auf einige Beyspiele angewendet, steht in Orontii Finei De Geometria Libri duo (Protomathesis. Paris. 1532.), Lib. II. Cap. 21. De universali triangulorum dimensione, fol. 80. b. sq.; in Euclidis sex Libri priores — Algebræ porro regulæ — Authore Jo. Scheubelio (Basil. 1550.), als Appendix zu Elem. I, 34. p. 110. sqq.; in Petri Rami Arithmeticæ Libri duo, Geometriæ se-

ptem et viginti (Francof. 1599.), Geometr. Lib XII. §. 9. p. 89; in Adr. Metii Arithmeticæ Libri duo et Geometriæ Libri sex (Lugd. Bat. 1640. zuerſt 1625.) Geometr. pract. Part. II. Cap. 3. p. 161.

§. 167.

Ramus (Geometr. l. c.) ſagt von dieſer Regel: Trianguli cujuscunque geodæsia generalis una est apud Heronem a) laterum additione, dimidiatione, subtractione, multiplicatione, et quadrati lateris inventione, hoc modo: Si de dimidio collectorum laterum dati trianguli latera sigillatim subducantur, latus continue

a) Iſt es vielleicht Schreib- oder Drukfehler, wenn Adrian. Metius an dem §. 166. angeführten Ort angiebt: Generalis via cognoscendi aream cujusvis trianguli ex datis lateribus est apud Theonem, laterum simul additione, subductione, multiplicatione, et lateris quadrati inventione, ut sequitur? Wenigſtens iſt die Stelle der angeführten von Ramus übrigens ganz ähnlich, und in Theons Commentar über das Almageſt ſteht die Regel nicht.

Dieſe Angabe wird nach Metius und mit Beruffung auf ihn von De la Hire (Hist. de l'acad. roy. des sc. Année 1700. Avec les memoires de math. et de phys. pour la meme année. Amst. 1706. Hist. p. 126. Mem. p. 94.) aus Gelegenheit ſeines algebraiſchen Beweiſes dieſer Regel wiederhohlt.

Phil. Naude (Miscellanea Berolinensia. Continuatio V. ſive Tom. VI. Berolini 1740. Pars III. p. 218.) ſchreibt dieſelbe dem Ptolemäus ſelbſt zu: Lemma I. Si trianguli cujusdam latera dicantur m, n, p, illius area valebit quartam partem radicis quadratæ e producto harum quantitatum in se invicem ductarum $(m+n+p)(m+n-p)(m+n+p)(-m+n+p)$. Hoc autem est notissimum Ptolemæi theorema, geometris et passim et pridem demonstratum. So wie Lemma III. In omni quadrilatero in circulum inscripto rectangulum diagonalium est æquale summæ binorum rectangulorum sub oppositis lateribus factorum. Et hoc rursus est notissimum Ptolemæi theorema, geometris passim demonstratum. Dieſes ſteht nun zwar in dem Ptolemäiſchen Almageſt (Lib. I. Cap. 9.); aber nicht jenes.

facti e dimidio et reliquis erit area trianguli — Geodæsia ista generalis facilima et expeditissima est, si latera integro numero numerentur: quamvis, si causam requiras, ænigmati potius quam theoremati germana sit. Itaque demonstratio ejus in Herone nulla est. Jordanus b) et Jordano posteriores demonstrare conati sunt; sed obscure et per stereometriam, quam etiam continuatio multiplicationis e dimidio et reliquis in ipso theoremate videtur indicare. Demonstrationem itaque hanc rejecimus in Scholas ad finem ultimi Libri, si quis requirit.

In den Scholis mathematicis (l. c. §. 165.) aber führt Ramus dieſen Beweis mit der Aufſchrift an: Demonstratio geodæsiæ triangularis, huc rejecta propter hysterologiam obscuram; und bemerkt am Ende derſelben: Hæc igitur demonstratio Jordani & Tartaleæ egregiam suorum authorum in mathematicis intelligentiam demonstrat; at vellem etiam egregiam logicam una demonstraret.

§. 168.

In Ludolphs van Ceulen Fundamenta arithmetica et geometrica, in Latinum translata a Willebr. Snellio (Lugd. Bat. 1615.), Lib. II. Prop. 35. wird p. 70. sq. der Satz und Beweis §. 164. (jener mit des Ramus Worten §. 167., dieſer mit einigen Aenderungen und Abkürzungen, und zum Theil auf ein Beyſpiel ange-

b) In Jordani Nemorarii Arithmetica decem libris demonſtrata, Paris. 1514. (zuerſt 1496. Vossius De scient. math. p. 313. Käſtners Geſch. d. Math. I B. S. 88. ff.) kommt der Satz nicht vor. Hujus tres libri de geometria exſtitere olim in Palatina bibliotheca, quæ nunc pars facta Vaticanæ; ſagt Voſſius p. 333.; und ſezt des Jordanus Lebenszeit anno 1200. vel aliquanto poſt.

Lucas Patiolus nennt in dem ſeiner Summa vorangeſchikten Summario de la prima parte principale (fol. 4. b.) Giordano unter den neueren Schriftſtellern, aus denen er ſein Werk zuſammengetragen habe.

wendet) vorgetragen; darauf aber p. 71. von Snellius bemerkt: Quotquot hanc demonstrationem e Jordano aut Tartalea descripserunt, omnes eandem insistunt viam, et per nescio quam planoplanorum stereometriam lectorem circumducunt: longe aliter quam veteres illi mathematici, qui studiose declinabant illam μεταβασιν εις αλλο γενος, eamque vel applicatione ad communem altitudinem tollunt, vel proportione dissolvunt, vel rationum compositione interpretantur; quemadmodum apud Archimedem, Apollonium, aliosque sæpe videre est. Sed istam αλογιαν Petrus Ramus primus notavit: cujus gratia olim hanc obscuritatem et caliginem discussimus, et plana tractavimus plane, hoc est, in suam classem et ordinem reduximus; quam ad rem hoc Lemmatio prævio nobis opus erit: Si quatuor rectæ sunt proportionales, tria rectangula sub prima et secunda, secunda et tertia, tertia et quarta erunt continue proportionalia.

Snellius ſagt nun über den Ausdruk des Saßes: Theorema porro ipsum ad areæ triangularis investigationem comparatum, quod non geometrica enuntiatione, sed διοριμω formula hactenus circumfertur, nunc illud reformatum bene geometrice ita concipio et enuntio: Si de dimidio collectorum laterum dati trianguli latera sigillatim subducantur; erit ut rectangulum sub dimidio et differentia quacunque ad aream trianguli, sic eadem area ad rectangulum sub reliquis differentiis comprehensum; leitet (p. 72.) dieſen Saß, mittelſt ſeines Lehnſaßes und der vorhin bewieſenen Gleichheit der Rectangel SD × GF und FB × BD, aus der Proportion der AD : AF = SD : GF; und zeigt (p. 72. sq.) an, daß der Saß auch ſo ausgedrükt werden könne: Si de dimidio collectorum laterum trianguli latera sigillatim subducantur, rectangulum comprehensum sub media proportionali inter dimidium et differentiam quamlibet, itemque sub media proportionali inter reliquas differentias, æquatur dato triangulo; mit dem Beyſaß: Sed tum

praemissum a nobis Lemma paulo aliter quoque concipi debuit.

In seiner Construction (p. 72.) nimmt er 1) S als den Mittelpunkt des in das Dreyek beschriebenen Kreises an (den er aber nicht verzeichnet): und als damit anerkannt die Gleichheit sowohl der Perpendikel SD, SL, SK, als der Abschnitte AD und AK, BD und BL, CL und CK; auch die Halbirung der Winkel des Dreyeks durch die aus S an ihre Spitzen gezogene gerade Linien SA, SB, SC.

2) Halbirt er des Dreyeks ABC Winkel unter der Grundlinie BC durch die in G zusammenstossende gerade Linien BG, CG; zieht die gerade Linie SG; und fällt aus G die Perpendikel GM, GF, GH auf BC und auf die verlängerten AB, AC: schließt nach El. I, 26. die Gleichheit sowohl der Perpendikel GF, GM, GH, als der Abschnitte BF und BM, CM und CH; und zeigt, daß ASG eine gerade Linie sey; weil, zufolge der Halbirungen der Winkel über und unter BC, jeder der Winkel GBS, GCS ein rechter Winkel sey; folglich um das Viereck GCSB sich ein Kreis beschreiben lasse; daher der Winkel GSC = GBC (III, 21.) = $\frac{1}{2}$ FBC (constr.) = $\frac{BAC+BCA}{2}$ (I, 32.) = SAC+SCA (Constr. u. Bew.), und die Winkel GSC + ASC = 2 Rechten seyen (I, 32.)

Worauf er folgert AF = AH (I, 47.) = $\frac{AB+BC+CA}{2}$ (constr. u. Bew.): Winkel FBG + DBS = Rect. (I, 13. und weil GBS ein rechter ist) = BSD + DBS (I, 32.); also FBG = BSD; Dreyek GFB ∽ BDS (VI, 4.); GF: FB = BD: DS; und daher (VI, 16.) Rectangel DS × GF = FB × BD.

§. 169.

Leonh. Euler (Novi Commentarii Acad. sc. imp. Petrop. 1750. Variæ demonstrationes geometricæ. p. 53. sqq.) und Boscowich (Opera pertinentia ad opt. et

astron. Tom. V. Bassani 1785. Opusc. XIV. Demonstrations simples de quelques beaux theoremes appartenants aux triangles. p. 438. sqq.) schränken die Construction §. 48. *Fig.* 18. auf den in das Dreyek ABC beschriebenen Kreis, und die aus seinem Mittelpunkt S an des Dreyeks Winkelspitzen und auf seine Seiten senkrecht gezogene gerade Linien ein (*Fig.* 75.): dagegen statt des zweyten Kreises Euler auf eine der aus S an die Winkelspitzen des Dreyeks gezogenen Linien CS aus der Spitze eines andern Winkels B des Dreyeks den Perpendikel BP fällt, und diesen verlängert, bis er die Verlängerung des auf der Zwischenseite BC stehenden Loths LS in Q trift; Boscowich aber aus zwey Winkelspitzen B, C des Dreyeks die Perpendikel BO, CR auf die aus S an die Spitze des dritten Winkels des Dreyeks gezogene gerade Linie AS fällt.

Ihre Deduction der Regel §. 50. n°1. reducirt sich, so wie die §. 164. sq. angeführten, auf den Beweis des Satzes: daß die halbe Summe der Seiten des Dreyeks sich zu dem Ueberschuß dieser halben Summe über eine Seite des Dreyeks verhalte, wie das Rectangel aus den Ueberschüssen eben dieser halben Summe über jede der zwey andern Seiten des Dreyeks zu dem Quadrat des Halbmessers des in das Dreyek beschriebenen Kreises; oder, zufolge des §. 164. bewiesenen,

daß $AD+BC : \begin{cases} BL = AD \times CL : SL^q \\ AD = BL \times LC : SD^q \end{cases}$;

und ihre Beweise dieser Proportionen lassen sich auf folgende Art darstellen.

Da der Winkel $KSD = 4\text{Rect.} - KSL - LSD$

d. h. $2ASD = 4\text{Rect.} - 2CSL - 2LSB$;

so ist $ASD = 2\text{Rect.} - CSL - LSB$

$= 2\text{Rect.} - CSB = BSP$;

daher das Dreyek ADS ∽ BPS.

Ebenso beweißt man: daß der Winkel $\begin{matrix} BSL = CSR; \\ CSL = BSO; \end{matrix}$

und daher das Dreyek $\begin{matrix} BLS \backsim CRS \\ CLS \backsim BOS. \end{matrix}$

Ferner sind die rechtwinklichten Dreyeke CLS, CPB, QLB, QPS, welche je zwey und zwey einen spizen Winkel gemein haben, ähnlich.

Und eben so sind die Dreyeke AOB ∽ ADS; ARC ∽ AKS.

Daher 1°. nach der Euleriſchen Conſtruktion

$$AD : \begin{Bmatrix} DS \\ SL \end{Bmatrix} = BP : PS, \text{ weil das Dreyek } ADS \backsim BPS$$
$$= BC : QS \text{ weil } CPB \backsim QPS$$
$$= AD + BC : QL \text{ (V, 12.)}$$

und $CL : SL = QL : BL$, weil das Dreyek CLS ∽ QLB

also $\overline{AD \times CL : SL^q = AD + BC : BL}$

2°. Nach der Boſcowichſchen

$$BO : SD = AB : AS \text{ weil das Dreyek } AOB \backsim ADS$$
$$CR : \begin{Bmatrix} SK \\ SD \end{Bmatrix} = AC : AS \text{ weil } ARC \backsim AKS$$

mithin $\overline{BO \times CR : SD^q = AB \times AC : AS^q}$

Da aber $BL : CR = BS : CS$ weil $BLS \backsim CRS$
$= BO : LC$ weil $BOS \backsim CLS$

also (VI,16) $BO \times CR = BL \times LC$;

und $AB = AD + BL$
$AC = AD + CL$

daher $AB \times AC = AD^q + AD \times BC + BL \times LC$:

ſo folgt, daß

$$BL \times LC : SD^q = AD^q + AD \times BC + BL \times LC : AS^q$$
$$= AD^q + AD \times BC : AD^q \text{ (V,19.I,47.)}$$
$$= AD + BC : AD \text{ (VI, 1.)}$$

§. 170.

Newton (Arithmetica universalis. Lond. 1722. Zuerſt Cantabrig. 1707. Resolutio quæstionum geometricarum. Probl. XI. XII. p. 129. sqq.) führt den Beweis nicht, wie die bisherigen, auf den Saz zurük: daß ein Dreyek einem andern gleich ſey, welches den Perimeter

des ersten zur Grundlinie, und den Halbmesser des in dieses beschriebenen Kreises zur Höhe habe; sondern begründet ihn unmittelbar durch Bestimmung der Höhe des Dreyecks; wozu er eine der §. 51. vorgetragenen ähnliche Analysis gebraucht, die er in Probl. XI. bloß symbolisch und etwas unentwikelt, in Probl. XII. aber ausführlicher mittelst folgender Construction darstellt (*Fig.* 76.); und dabey in Probl. XI. von dem Saz $AD = \frac{AB^q + AC^q - BC^q}{2AB}$ (§. 36.) $= \frac{1}{2}AB + \frac{AC^q - BC^q}{2AB}$, in Probl. XII. aber von dem §. 127. n° 3. angeführten, auch von Geber in diesem Fall gebrauchten Saz ausgeht: daß in einem ungleichschenklichten Dreyek ABC der Unterschied der Quadrate der Schenkel AC, BC dem doppelten Rectangel aus der Grundlinie AB und dem Segment derselben JD gleich ist, welches zwischen dem Perpendikel CD und dem Punkt J liegt, der die Grundlinie AB halbirt; folglich $JD = \frac{AC^q - BC^q}{2AB}$ ist.

Nun schneidet er (ohne die in *Fig.* 76. verzeichnete Halbkreise zu beschreiben) von AB und ihrer Verlängerung $\left.\begin{matrix}AE\\AF\end{matrix}\right\} = AC$, und $\left.\begin{matrix}BH\\BG\end{matrix}\right\} = BC$ ab; und zieht CE, CF: wodurch FCE als Winkel in dem über FE beschriebenen Halbcirkel ein rechter (III, 31.); und CD die mittlere Proportionallinie zwischen FD und DE (VI, 8. Zus.), folglich $CD^q = FD \times DE$ (VI, 17.) wird.

Aber $DE = JE - JD = AE - AJ - JD = AC - \frac{1}{2}AB - \frac{AC^q - BC^q}{2AB}$ (Constr. u. Bew.)

$= \frac{2AB \times AC - AB^q - AC^q + BC^q}{2AB} = \frac{BC^q - (AB - AC)^q}{2AB}$ (II, 7.)

$= \frac{(BC + AB - AC)(BC - (AB - AC))}{2AB}$ (II. 5. Zus.)

$= \frac{(GB + BE)(HB - BE)}{2AB}$ (Constr.) $= \frac{GE \times EH}{2AB}$

und

und $FD = FE - DE = 2AC - \frac{2AB \times AC - AB^q - AC^q + BC^q}{2AB}$

(Constr. u. Bew.)

$= \frac{2AB \times AC + AB^q + AC^q - BC^q}{2AB} = \frac{(AB+AC)^q - BC^q}{2AB}$ (II, 4)

$= \frac{(AB+AC+BC)(AB+AC-BC)}{2AB}$ (II, 5. Zuf.)

$= \frac{(FB+BG)(FB-BH)}{2AB}$ (Conſtr.) $= \frac{GF \times FH}{2AB}$

Daher $CD^q = FD \times DE = \frac{GF \times FH \times GE \times EH}{4AB^q}$;

$CD = \frac{\sqrt{GF \times FH \times GE \times EH}}{2AB}$

$CD \times AB = \frac{1}{2}\sqrt{GF \times FH \times GE \times EH}$

und des Dreyeks ABC Fläche $= \frac{1}{4}\sqrt{GF \times FH \times GE \times EH}$

$= \frac{1}{4}\sqrt{(CB+BA+AC)(CA+AB-BC)(CB+BA-AC)(BC+AC-AB)}$.

§. 171.

Vollſtändiger entwikeln die erſte §. 170. erwähnte Beweisart in ihren Cours de mathematique Camus (II Partie. Paris 1764. zuerſt 1750. p. 282. sqq.), und Boſſut (III Partie. Paris 1775. p. 130. sqq.)

Mehr oder weniger nähern ſich derſelben die algebraiſche Behandlungen von De la Hire (S. §. 167. Note a.), Frid. Guil. de Oppel (Analysis triangulorum. Dresd. & Lips. 1746. Sect. I. §. 28. 30. p. 6.), und mehrerer anderer Schriftſteller; ſo wie die trigonometriſche von Käſtner (Anfangsgr. der Arithm. Geom. — vierte Aufl. Göttingen 1784. zuerſt 1758. S. 505. ff. 518.), Karſten (Mathesis theoret. elementaris atque sublimior. Rostochii 1760. p. 313. sqq. Lehrbegriff der geſammten Mathematik. II Th. 1te Abtheil. Roſtok 1786. S. 463. f.), und andern.

§. 172.

Die §. 167. angeführte Angabe von Ramus, daß die von ihm ſogenannte Geodæsia generalis trianguli ohne Beweis in einem Werk von Heron ſtehe, gründet

sich ohne Zweifel auf Erfund in einer der Handschriften, von welchen er Schol. Math. Lib. I. p. 33. sq. folgendes meldet; woraus zugleich erhellet, daß er sie alle, und somit auch jene Regel zur Berechnung des Inhalts der Dreyecke, dem Heron von Alexandrien aus dem zweyten Jahrhundert vor C. G. zuschriebe: Quid Hero, qualis tandem mechanicus fuit? Certe cognomentum publicæ laudis consensum quendam indicat — Hero igitur mechanicus, omnem geometriæ varietatem, elegantiam, subtilitatem videtur persecutus esse. Studiose vel curiose potius Heronis opera nobis exquisita sunt; tandemque ex variis bibliothecis collecta Græce et manu descripta Πνευματικα integra, Αυτοματοποιητικα multis locis corrupta, fragmenta quædam geodætica. Alia vero pleraque Heronis prædicantur: ut de machinis bellicis, earumque figuris eleganter descriptis, περι βελοποιικης, quod opus vel idem, vel affine est. Mechanica dicuntur esse in Vaticana bibliotheca Romæ, et quidem Latine etiam conversa; hic liber Μηχανικαι εισαγωγαι ab Eutocio dici videtur 2 de sphæra: Geometria denique ipsa apud Diegum Hurtadum esse dicitur. Duplicatio cubi, quæ geometriæ coronis summa est, in Eutocio integra legitur; eaque a Pappo Lib. 3. Theor. 7. præ ceteris approbatur. Itaque Hero videtur apud Proclum Lib. 3. στοιχειωτης fieri —

Bestimmtere Nachricht darüber giebt Montucla (Hist. des Mathemat. Nouv. Edit. Tome I. p. 343): Heron le jeune, ainsi nommé pour le distinguer de celui d'Alexandrie, etoit un ingenieur, dont l'age est asses incertain. Il vivoit probablement vers le huitieme siecle. On a delui un Traité des machines de guerre, qui est curieux & interessant; il fait partie de la Collection des Mathematici veteres, magnifiquement imprimée au Louvre en 1693 pas les soins de M. Thevenot: mais sa Geodesie — n'est d'aucune importance. Remarquons cependant, qu'on

y trouve la methode ingenieuse de mesurer la surface d'un triangle rectiligne par la connoissance seule des trois cotés, sans rechercher la perpendiculaire: mais Heron la donne sans demonstration; & il est probable, qu'elle est l'ouvrage de quelque mathematiçien anterieur & plus profond. Tartaglia, a qui j'en ai attribué autrefois la decouverte (Hist. des Math. Paris 1758. T. I. p. 462. sq.), & Oronce Finée, qui la donne aussi dans sa Protomathesis, ne seront plus que ceux, qui l'ont demontrée parmi nous. Leztere beyde Angaben ſind nach §. 164. ff. zu berichtigen.

§. 173.

Savilius (Prælectiones tresdecim in principium Elementorum Euclidis. Oxon. 1621. p. 36.) erwähnt auch einer handſchriftlichen Geodäſie von Heron; die er aber, ihrer Geringfügigkeit wegen, nicht als Werk von dieſem (nämlich von dem älteren, dem Verfaſſer der Πνευματικα) anerkennen will: De Herone, cum non aliud, quod sciam, ejus ingenii monumentum supersit præter Pnevmatica, non possum judicare. Nam de Geodæsia libellum nihili, qui vulgo sub Heronis nomine circumfertur, & in schedis meis alicubi manuscriptus reperitur, ut indignum tanto nomine prorsus aspernor.

Schon 1572. aber ſind zu Venedig in 4°. gedrukt worden Heronis Mechanici Liber de machinis bellicis; nec non Liber de geodæsia: a Francisco Barocio, Patritio Veneto, Latinitate donati, multis mendis expurgati, & figuris ac scholiis illustrati. Barocius berichtet in ſeiner Vorrede: Græcum Heronis exemplar, quod in Latinum sermonem convertimus, illud est, quod Bononiæ in bibliotheca S. Salvatoris reperitur. Nullum autem aliud Græcum exemplar vidimus. Sed postquam illud a nobis Latinitate donatum fuit; ostendit nobis magnificus D.

Bernardinus Lauredanus in bibliotheca Divi Marci Venetiarum quandam etiam aliam tralationem operis de machinis bellicis, a quodam Joanne Sophiano factam; quam Cardinali Bessarioni sua quadam epistola cum dedicasset, asserit se nescire, cujus autoris illud opus sit, quandoquidem titulo carebat. Verum jam dicta tralatio a nostra longe diversa est propter multos defectus locosque depravatos atque mendosos exemplaris Græci, quod ipse habuerat: in ipsa vero Sophiani tralatione non est secundum opus de Geodæsia, sed primum tantum de Machinis bellicis. In dem jener Abhandlung vorausgeschikten (Procœmium fol. 48.) stellt der Verfasser ihre Beziehung auf diese, und überhaupt ihre Fassung und Zwek so dar: Quoniam non licet obsidere volentibus a longe murorum altitudines ac spatiorum intervalla, nec non fluviorum latitudines in mensuratione supputare — propterea decrevimus ipsam dioptricæ cum ratione vim, ac eam ipsius partem, quæ multis in rebus vitam humanam maxime juvat, ex antiquioribus eruditissimisque simpliciora colligentes, nudis linearibus indaginibus explicare; in paucisque diagrammatibus demonstrationes facere, quonam pacto extra jaculum hostium stantes altitudines ac longitudines intervallaque revera sine mendacio connumerare valeamus. — In beyden Büchern führt der Verfasser einigemal den älteren Heron, schlechtweg unter dem Namen Heron, oder mit dem Beysaz Heron mathematicus, Heron Alexandrinus, an: nämlich fol. 2. b; 34, b; 40, b; 54, b; 68, b. Namentlich verweißt er in dem 5ten Saz des zweyten (fol. 54. b.) auf eine geometrische Schrift desselben: De mensuratione vero earum, quæ trapeziæ & trapezoideæ vocantur — ceterarumque cum ordinatarum tum inordinatarum figurarum Archimedes et Heron in universali tractatione *)

*) Eutocius führt in seinen Erläuterungen des 3ten Satzes der Archimedischen Kreismessung Μετρικα von Heron an: Οπως δε δει συνεγγυς την δυναμενην πλευραν του δοθεντα αριθμον ευρειν, ειρηται μεν Ηρωνι εν τοις Μετρικοις. (Αρχιμηδους τα Σωζομενα μετα των Ευτοκιου Ασκαλωνιτου υπομνηματων. Oxon. 1792. p. 208.)

eruditioribus demonstrarunt. Uebrigens sagt er in diesem Satz nur: At ipsa triangulorum spatia a dimidio quadrangulorum, quæ ex ipsis describuntur, supputare oportet; und weiter findet sich in dieser Ausgabe seiner Geodäsie nichts von Ausmessung der Dreyeke.

§. 174.

Heilbronner (Hist. Mathes. univ. p. 397. sq.) nennt unter den Schriften des jüngeren Heron Excerpta de mensuris ex Heronis geometria; wovon er in der Note ll. sagt: Græce atque Latine cum versione Bernardi de Montfaucon vulgarunt Benedictini Tomo primo Analectorum Græcorum Paris. 1688; integram ex codice regio edere ob prolixitatem veriti. Diese Excerpta habe ich zu sehen nicht Gelegenheit gehabt.

Hingegen hat mir Hr. Diaconus Camerer in Stuttgart während seines Aufenthalts in Paris in den Jahren 1789. und 1790., nebst mehreren ausführlichen Nachrichten von den in der damaligen königlichen Bibliothek befindlichen Abschriften von Werken des jüngeren Heron; folgende Stelle aus der in Cod. 2013. enthaltenen Γεωδαισια τε Ηρωνος τον των χηματων αποδεικνυσα μοδισμον και παντα τα κατα μερος αυτε mitgetheilt: Μεθοδος επι παντος τριγωνε ευρισκειν το εμβαδον. Παντος τριγωνε δοθεντος ευρισκειν το εμβαδον ποιει ετως· ζυντιθει τον αριθμον των τριων πλευρων ομε και των ζυναγμενων λαμβανε το $\overline{υ}$ και απο τετων παλιν αφαιρε εκασης πλευρας αριθμον και των υπολιμπανομενων το μεν της μιας πλ πολλαπλασιαζε επι τον $\overline{υ}$ της απο της ζυνθεσεως των πλ τον δε της εταρας επι των γεγονοτων απο τε πρωτερε πολλαπλασιασμε και τε γεγονοτος λαβε την τετραγωνικην πλευραν και τετο εσαι το εμβαδον. Οιον εν υποδειγματι εσω τριγωνον ε αι πλευραι $\overline{ι}$ $\overline{ι}$ $\overline{γ}$, $\overline{δ}$, $\overline{ε}$ οπερ και ορθογωνιον τριγωνον εστιν. Ο εκ των τριων πλ συντιθεμενων γινεται $\overline{ιβ}$ $\overline{γ}$ και $\overline{δ}$ $\overline{ζ}$ και $\overline{ε}$ $\overline{ιβ}$ τετων το $\overline{υ}$ $\overline{ς}$ ων αφαιρεμενης εκασης πλευρας της μεν $\overline{γ}$ της δε $\overline{β}$ της

δε α τετων ο μεν γ πολλαπλασιασης επι τον ϛ ποιει τον ιη ο δε β επι τον ιη ποιει τον λϛ η δε μονας επι τον λϛ ποιει αυτην λϛ τετων πλ □ ο ϛ και εστι το εμβαδον τοιστε τριγωνε Δ ϛ και τουτο δηλον και απο της ετερας μεθοδε της επι των ορθογωνιων τριγωνων τα γαρ γ της καθετε επι τα υ της βασεως τετ εστι τα β πολλαπλασιαζομενα ποιουσι τον ϛ. Πεπειραται δε αυτη η μεθοδος και εν τοις λοιποις αλλοις τριγωνοις και εστιν ασφαλεστατη.

In Cod. 2509. welcher auch die Geodäsie von Heron, und darin die obige Regel, aber ohne Anwendung auf ein Beyspiel, enthält, heißt es nach den Worten και των υπολιμπανομενων vollständiger und correcter: τον μεν της μιας πλευρας πολλαπλασιαζε επι το υ των απο της συνθεσεως των πευρων τον δε της ετερας επι τον γεγονοτα απο τε πρωτε πολλαπλασιασμε και αυθις τον της λοιπης πλευρας επι τον γεγονοτα απο τε δευτερε πολλαπλασιασμε και τε γεγονοτος λαβε &c.

In Cod. 2013. steht unmittelbar nach der angeführten Stelle: τελος της τε Ηρωνος αλεξανδρεως γαιωδεσιας. Die Schrift fangt mit einer kurzen Einleitung an, worin die ersten Begriffe der Geometrie erklärt, und ihr Ursprung wie gewöhnlich von den Egyptern und den Nilüberschwemmungen hergeleitet wird. Noch bemerkt Hr. Camerer, es scheine diese Schrift nur ein Auszug aus einem etwas ausführlicheren Werk zu seyn, das in eben dem Mscptenband von einer andern Hand unter dem Titel: Ευκλειδε (dieß Wort ist ausgestrichen, und mit anderer Hand darüber geschrieben — Ηρωνος) περι γεωμετριας vorkommt. Wenigstens stimmen einzelne Abschnitte beyder wörtlich überein. Doch zeigt sich auch bey einerley Materien Verschiedenheit. So ist z. B. die obige Regel den Inhalt eines Dreyeks zu finden auch in dem ausführlichen Werk, aber nicht in allgemeinen Ausdrüken, sondern gleich auf mehrere einzelne Beyspiele angewandt, enthalten. Dieses grössere Werk endiget mit den Wor-

ten: Παπληρωται η των επιπεδων κατα ειδεσιν Ηρωνος μετρησις.

Ex των τα Ηρωνος περι των της γεωμετριας ονοματων stehen fol. 33. b. — 50. griechiſch, und nach neu angefangener Zählung fol. 55. b. — 75. Lateiniſch (mit der Aufſchrift: Ex scriptis Heronis Alexandrini de geometricis definitionibus selecta quædam in usum Academiæ Argentinensis) in Ευκλειδου Στοιχειων το πρωτον. Ηρωνος Αλεξανδρεος ονοματα γεωμετρικα. Euclidis Elementorum liber primus. Heronis Alexandrini vocabula geometrica, antehac nunquam edita, Græce & Latine. Per Cunradum Dasypodium, in usum Academiæ Argentinensis. Argentorati MDLXX. 8°.

§. 175.

Mit welchem Grund in einigen der zuletzt angeführten Stellen Alexandrien auch als das Vaterland des jüngern Heron angegeben werde, iſt mir nicht bekannt.

Daß er unter den Griechiſchen Kayſern zur Zeit der Kriege mit den Saracenen ſein Buch De machinis bellicis geſchrieben habe, erhellet aus dem Schluß deſſelben fol. 47: Has igitur obsidionales machinas — ipsi exercituum præsides cum ratione assiduaque meditatione accurate conficientes, divinam ubique locorum ultionem illucescere facientes, justitia et pietate ornati, et forti manu atque mutua opera bellicaque societate Dei cultorum Christique amatorum Romanorum imperatorum convalescentes, ac præsidiis custoditi, facile ipsius potissimum Agar civitates capient, nullum ipsi incommodum a destruentibus divinum cultum inimicis patientes.

Eine nähere Beſtimmung ſeiner Lebenszeit erwähnt Gerard. Jo. Voſſius (De univ. Matheseos natura & constitutione Liber: cui subjungitur Chronologia mathematicorum Amstel. 1650. p. 294.): Sub Heraclio imperatore (welcher von 610. bis 641. regierte)

Hero junior vixisse existimatur. Hoc inde colligit Josephus Blancanus in Chronologia mathematicorum, quod in Geodæsia (quam genuinam esse extra controversiam ponit) stellas fixas dicat a Ptolemæi tempore ad suam usque ætatem progressas esse gradibus VII; quæ res ex sententia Albategnii requirit annos CCCCLX. Atqui Ptolemæus floruit sub M. Aurelio Antonino, qui imperare coepit anno CLXIII. His annis si addamus numerum superiorem, exsurget annus Christi IↃCXIII. Circa igitur Heraclii tempora claruit Hero junior. Majorem interim, ſezt er hinzu, hoc argumentum apud me vim haberet, nisi de auctore genuino dubitaretur; und beruft ſich auf die §. 173. angeführte Stelle von Savilius; mit dem Beyſatz: Digniora Herone videntur Belopoeica: verwechſelt alſo hier den ältern und jüngern Heron, und die jedem zugehörige Schriften, welche er ſelbſt vorher p. 115. 290. unterſchieden hatte. (Vergl. Heilbronneri Hist. mathes. univ. Lips. 1742. p. 398.)

Die Stelle der Geodæsiæ Heronis, worauf ſich dieſe Zeitbeſtimmung gründet, lautet in der Ueberſetzung von Barocius (p. 70. b. sq.) ſo: Volui observare, quot gradibus distet in antecedentibus signorum lucida Hyadum stella (quæ etiam Lambauras, hoc est, fax ardens dicitur) ab ea, quæ in corde Leonis est, vocatur autem Basiliscus; atque circa secundam horam nocturnam cum orientem versus dispexerim, ac tanquam manifestam eam, quæ in corde Leonis est, stellam acceperim, adnotavi gradum in tympano, juxta quem regulæ index extitit; & cum ad antecedentia regulam converterim, dispexi in Tauro ipsam Lambauram, hoc est, facem ardentem: cum gradum, qui apud ipsam est, similiter adnotarim, & cum in tympano gradus inter signa jacentes enumeraverim, eos 80 fere inveni; quot etiam sunt ii, quibus ambæ stellæ ab invicem distant. Nam ipse Basiliscus, una cum additamento motus eorum, quæ ab ætate

Ptolemæi sunt, temporum, gradus $10\frac{1}{2}$ in Leone nunc possidens reperitur; & lucida Hyadum in Tauro, $20\frac{1}{3}$: cum autem ipsos $10\frac{1}{2}$ gradus Leonis in antecedentia, tum Cancri, tum Geminorum singula 30, & in $9\frac{1}{3}$ Tauri connumeraverim; eosdem 80 fere gradus inveni. Pariter autem in consequentia quoque, ut a Tauro ad Leonem. Rursus autem circa mediam noctem cum ab ea, quæ in corde Leonis est, stella ad consequentia Arcturum, qui Bootes etiam vocatur, in Libra, borealiorem autem æquinoctiali gradus 31 existentem dispexerim; adnotavi, reperique in medio gradus 54 fere: quot sunt ii, quibus etiam Arcturus ad consequentia a Basilisco distat. Arcturus enim hac nostra tempestate una cum dicto motus additamento quintum Libræ gradum obtinet: suntque Leonis quidem ad consequentia $19\frac{1}{2}$, Virginis 30, & 5 Libræ, quot etiam in tympano fere connumerati fuere.

In dem Sternverzeichniß, welches Ptolemäus dem VIIten Buch seines Almagests beygefügt, und worin er die Längen der Sterne für den Anfang der Regierung Antonins (εις την αρχην της Αντωνινε βασιλειας) des Frommen, nicht des Philosophen (vergl. §. 8. Note e. S. 10.), also um das Jahr 138. nach C. G. angegeben hat (Μεγ. Συντ. p. 172. Almag. Lib. VII. Cap. 5. p. 187.), sind

ο λαμπρος των υαδων (p. 184.)	in ♉ 12° 40′ oder 20
ο επι της καρδιας, καλουμενος βασιλισκος (p. 186.)	♌ 2 30
ο μεταξυ των μηρων Βοωτε ο καλουμενος αρκτουρος (p. 185.)	♎ 27 0

(Vergl. Ptolemäus Beobachtung und Beschreibung der Gestirne — mit Erläuterungen — von Bode. Berlin 1795. S. 136. 149. 102. Das Zeichen der Minutenzahl bey der Länge von dem glänzenden Stern der Hyaden ist in dem griechischen Texte zweydeutig: die lateinische Uebersetzung p. 198. hat 40′; die deutsche 20′.)

Der Unterschied der Ptolemäischen und der von Heron angegebenen Längen ist nicht 7, sondern 8 Grade. Unter der Voraussetzung, daß Heron diese wirklich beobachtet habe, würden, 66 Jahre auf einen Grad nach Albatenius (De scientia stellarum, Cap. LI. p. 79. b.) gerechnet, 528; genauer aber, 72 Jahre auf einen Grad gerechnet (Astronomie par Lalande. 3me Edit. 1792. T. I. p. 314. T. III. p. 46.), 576 Jahre Zwischenzeit zwischen Ptolemäus und Heron; und, 138 Jahre dazu addirt, 666, oder genauer 714 Jahre nach C. G. (womit die Vermuthung von Montucla §. 172. übereinstimmt) für die Zeit der Heronischen Beobachtung herauskommen. Seiner Nachricht zufolge hat aber Heron nur die westliche und östliche Entfernung (oder die Längenunterschiede) des glänzenden Sterns der Hyaden und des Arcturus von Regulus beobachtet; ihre cum additamento motus eorum, quæ ab ætate Ptolemæi sunt, temporum, sich ergebende Längen aber zur Verification seiner beobachteten Entfernungen gebraucht. Wahrscheinlich hat er nun dieses additamentum motus nach der Ptolemäischen Bestimmung von 100 Jahren auf einen Grad (Μεγαλ. Συντ. p. 172.) berechnet; die von Albatenius wenigstens hätte er nicht gebrauchen können (§. 14. Note d. S. 18.). So wären seine Beobachtungen ungefähr 800 Jahre nach Ptolemäus, also um das Jahr 938; folglich seine Lebenszeit in das 10te Jahrhundert nach C. G. zu setzen.

§. 176.

Rhäticus giebt, ausser der §. 162. angeführten Art die Winkel eines ungleichseitigen Dreyecks aus seinen drey Seiten zu berechnen, noch folgende an (l. ibid. c. p. 99. sq.): Excessus, quo semissis perimetri triquetri superat singula latera, in se multiplica, nempe primum in secundum, & productum in tertium excessum; hunc hoc modo productum & constitutum numerum rursus divide per semissem perimetri; & quotientis radix quadrata sit tibi antecedens, & quivis excessuum consequens: at 10 000 000 000 numerus constituendæ

rationis sit antecedens, & competens ei consequens exquirito; ut, quæ sit ratio radicis prædictæ ad sumtum excessum, ea sit 10 000 000 000 ad inventum consequens: cum hoc consequente tanquam basi, si radix fuerit major excessu, de secunda serie; si autem minor, de tertia serie semissem anguli, cui sumtus excessus adjacet, elicies; dabitur igitur & totus.

D. h. (*Fig.* 18.) $\left.\begin{array}{l} \sqrt{\frac{AD \times DB \times CL}{AF}} : AD \\ \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}S-BC)(\frac{1}{2}S-AC)(\frac{1}{2}S-AB)}{\frac{1}{2}S}} : \frac{1}{2}S-BC \end{array}\right\} = \text{s. t.} : \text{Cotg.} \frac{1}{2}BAC$

oder $\left.\begin{array}{l} \frac{(\frac{1}{2}S-BC)(\frac{1}{2}S-AC)(\frac{1}{2}S-AB)}{\frac{1}{2}S} : (\frac{1}{2}S-BC)^2 \\ (\frac{1}{2}S-AC)(\frac{1}{2}S-AB) : \frac{1}{2}S(\frac{1}{2}S-BC) \end{array}\right\} = \text{sin. tot.}^2 : \text{Cotg.} \frac{1}{2}BAC^2$

$\frac{1}{2}S(\frac{1}{2}S-BC) : (\frac{1}{2}S-AC)(\frac{1}{2}S-AB) = \text{Cotg.} \frac{1}{2}BAC^2 : \text{s. t.}^2$
$= \text{sin. tot.}^2 : \text{Tg.} \frac{1}{2}BAC^2$ (§. 65.),

wie in §. 107. S. 212.

Rhäticus leitet diese Regel aus der Proportion her SD: AD = sin. tot: Cotg. DAS; mittelst des Lehnsatzes: Si excessus, quo latera superat semissis perimetri, inter se ordine multiplicentur, unus in alterum, & productum in tertium, ac, quod ex hac multiplicatione provenit, dividatur per semissem perimetri; quotiens est quadratum descriptum ad eam, quæ ex centro circuli triquetro inscripti; welchen er ganz so, wie Lucas Patiolus (§. 164.) beweiset.

§. 177.

Briggs (Arithmetica logarithmica. Lond. 1624. Cap. 18. Arithmetique logarithmique. Goude 1628. Chap. 16. p. 45. sq. S. Note e. zu §. 17. S. 45. f.)

verlängert (*Fig.* 18.) des Dreyeks ABC Seiten AB, AC so, daß $\left.\begin{matrix}AF\\AH\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}$ Umfang des Dreyeks; errichtet auf dieselbe in F, H die in G sich schneidende Perpendikel FG, HG; schließt aus dem, daß BF + CH = BC (constr.): der aus G mit dem Halbmesser GF = GH (I, 47. zus.) beschriebene, die Linien AF, AH berührende Kreis werde auch die Seite BC irgendwo, wie in M, berühren (weil, wenn er sie schnitte, BC > BF + CH; und, wenn er sie nicht erreichte, BC < BF + CH seyn würde); beschreibt ferner auch den Kreis innerhalb des Dreyeks ABC; und folgert den Lehnsatz §. 176. auf die ähnliche Art wie in §. 164.

Woraus er p. 45. theils die vorher schon (p. 43.) ohne Beweis, mit Beruffung auf Rami Geometr. Lib. XII. (S. §. 166.) angegebene Regel für die Fläche des Dreyeks, theils folgende für die Berechnung der Winkel herleitet: Pour trouver quelconque angle, substrayez le costé opposite d'iceluy du demiperimetre, restera le segment de l'un des costez entre le dit angle et le poinct, ou la peripherie du cercle inscript attouche le costé. Et sera ce segment au raid du cercle inscript, comme le raid du cercle à la tangente de la moitié de l'angle requis. $\left.\begin{matrix}D.\ h.\ \frac{1}{2}S-BC\\AD\end{matrix}\right\} : SD = \text{sin. tot. Tg. } \frac{1}{2}BAC.$

Vergl. Trigonometria Britannica. Goudæ 1633. (§. 71. Note a. S. 155.) Lib. III. Pars I. Cap. V. Probl. 3. p. 75.

§. 178.

Snellius (Doctrinæ triangulorum canonicæ Libri quatuor. Lugd. Bat. 1627. Lib. II. Prop. 10. n°4. p. 77. sq.) giebt diese Regel (übereinstimmend mit dem ersten Ausdruk §. 107.) so an: Si de dimidio collectorum laterum trianguli latera sigillatim subducuntur; erit ut latus facti a dimidio in differentiam lateris quærendo angulo oppositi ad factum [latus facti] a reliquorum laterum differentia, ita sinus totus ad tangen-

tem dimidii anguli quæsiti; erläutert ſie durch ein Beyſpiel; und ſetzt hinzu: Demonstratio derivatur ex circulo in triangulum inscripto & areæ triangularis inventione; puto sufficere, si tantum id digito indicem.

§. 179.

Snellius giebt noch (l. c. n° 3. p. 76. sq.) die erſte Proportion §. 58. folgendermaſſen an: Ut duplum rectangulum crurum ad excessum quadrati basis super quadratum differentiæ crurum, ita sinus totus ad sinum versum anguli ab illis comprehensi; welche er aus dem Lehnſatz (p. 74. sqq.) herleitet: Basis trianguli plus potest quam crurum differentia duplici rectangulo ex altero crure atque hujus apotomes & reliqui cruris summa, si angulus sit obtusus, aut differentia, si secus; der ſich, etwas kürzer als bey ihm, mittelſt der Conſtruction §. 82. (*Fig.* 31. 32.), wenn noch CD auf FB ſenkrecht gefällt wird, (ohne weitere Hülfslinien, die Snellius zieht) ſo beweiſen läßt:

$$BC^q - BK^q = CK^q + 2BKD \text{ (II, 12.)}$$
$$= \left\{\begin{matrix} FKD \\ 2AKD \end{matrix}\right\} + 2BKD \text{ (VI, 8. 16.)}$$
$$= 2AB \times KD \text{ (II, 1.)}$$

d. h. $BC^q - (AB-AC)^q = \begin{cases} 2AB(AC+AD \text{ (}Fig.\text{ 32.)} \\ 2AB(AC-AD) \text{ (}Fig.\text{ 31.)} \end{cases}$

Daher $2AB \times AC : BC^q - (AB^q - AC^q)$
$= 2AB \times AC : 2AB \times KD$
$= AC : KD =$ s. t. : sin. vers. BAC (Note zu §. 11. S. 13.)
$= AC : \begin{bmatrix} AC-AD \\ AC+AD \end{bmatrix} =$ sin. tot. : $\begin{bmatrix} \text{ſt} - \text{Cosin. CAD } Fig.\text{ 31.} \\ \text{ſt} + \text{Cosin. CAD } Fig.\text{ 32.} \end{bmatrix}$
$=$ sin. tot. : ſt - Cosin. BAC (§. 42. f.)

§. 180.

Oughtred (Trigonometria. Lond. 1657. p. 17.) drükt die zwey §. 55. (S. 117.) angegebene Regeln ſo aus:

Ut rectangulum sub cruribus anguli quæsiti est ad rectangulum sub semissem unæ basis & differentiæ crurum in semidifferentiam basis & differentiæ crurum, sic quadratum radii ad quadratum sinus semissis anguli quæsiti; vel aliter sic: Ut rectangulum sub cruribus anguli quæsiti est ad rectangulum sub semisumma crurum et basis in semidifferentiam summæ crurum et basis, sic quadratum radii ad quadratum sinus complementi semissis anguli quæsiti. Sein Beweis (p. 18. sq.) und die dazu gebrauchte Construction aber sind ziemlich verwikelt.

§. 181.

Franciscus a Schooten (Exercitationum mathematicarum Libri quinque. Lugd. Bat. 1657. Lib. V. Sect. XXVII. p. 499. sq.) schreibt die Erfindung der Regeln §. 55. 107. einem Irländischen Mathematiker, Wilhelm Purser, zu: Quo ad planorum triangulorum dimensionem expeditiorem haud quidquam deficiat, lubet hoc loco in medium afferre quatuor theoremata seu regulas, quibus ex cognitis lateribus trianguli cujuscunque plani, absque ejusdem in rectangula triangula divisione, quilibet angulus quadrupliciter investigari possit; qualia illa ab eorum inventore D. Guilielmo Pursero, mathematum peritissimo, Dublinii quondam addiscere licuit. Sunt autem omnia logarithmorum usui accommodata. —

Theor. I. Ut rectangulum sub duobus lateribus angulum quæsitum comprehendentibus ad rectangulum sub semisse omnium laterum & dimidia differentia, qua illa duo latera basin superant; ita quadratum radii ad quadratum sinus semissis anguli quæsito adjacentis.

Theor. II. Ut rectangulum sub duobus lateribus angulum quæsitum comprehendentibus ad rectangu-

lum sub dimidia differentia, qua latus unum una cum basi superat latus alterum, & dimidia differentia, qua latus illud alterum una cum basi superat latus primum; ita quadratum radii ad quadratum sinus semissis anguli quæsiti.

Theor. III. Ut rectangulum sub dimidia differentia, qua latus unum una cum basi superat latus alterum, & dimidia differentia, qua latus illud alterum una cum basi superat latus primum, ad rectangulum sub semisse omnium laterum et dimidia differentia, qua illa duo latera basin superant; ita quadratum radii ad quadratum tangentis semissis anguli quæsito adjacentis.

Theor. IV. Ut rectangulum sub semisse omnium laterum et dimidia differentia, qua duo latera basin superant, ad rectangulum sub dimidia differentia, qua latus unum una cum basi superat latus alterum, et dimidia differentia, qua latus illud alterum una cum basi superat latus primum; ita quadratum radii ad quadratum tangentis semissis anguli quæsiti.

Daß die lezten zwey Regeln auf eine hinauslauffen, die schon früher von Rhäticus (§. 176.) angegeben worden, erhellet aus §. 65.

Die von Schooten (p. 500. sqq.) angeführten Beweise und dazu gehörige Construction lassen sich etwas abgekürzt folgendermassen darstellen.

Aus der Spitze A des gesuchten Winkels BAC (*Fig.* 77. 78. 79.) beschriebe man mit dem kleineren Schenkel desselben AC den Halbkreis FCK über dem grösseren Schenkel AB und dessen Verlängerung; ferner beschreibe man aus B mit den Halbmessern BC, BK die Kreisbogen CH, KG; und halbire die Linien HF, CG in den Punkten L, O. So sind

$$LH = \tfrac{1}{2}FH = \frac{FB - BH}{2} = \frac{CA + AB - BC}{2}$$

$$BL = LH + HB = \frac{CA + AB - BC}{2} + BC = \frac{CA + AB + BC}{2}$$

$$OG = \tfrac{1}{2}GC = \frac{CB - BG}{2} = \frac{BC - (BA - AC)}{2} = \frac{BC + CA - AB}{2}$$

$$BO = OG + GB = \frac{BC - (BA - AC)}{2} + BA - AC = \frac{BC + BA - AC}{2}.$$

Aus C fälle man CD senkrecht auf BF.

Da $BF^q = BA^q + \left[\begin{matrix} AF^q \\ AC^q \end{matrix}\right] + 2BAF$ (II, 4.)

und $BC^q = BA^q + AC^q \mp 2BAD$ (I, 47. II, 12. 13.)

so ist $BF^q - \left[\begin{matrix} BC^q \\ BH^q \end{matrix}\right] = 2BA \times FD$ (II, 1.)

od. (II, 8.) $4BLH = 2BA \times FD$

$2BLH = BA \times FD.$

Wiederum

da $BC^q = BA^q + AC^q \mp 2BAD$

$\left[\begin{matrix} BK^q \\ BG^q \end{matrix}\right] = BA^q + \left[\begin{matrix} AK^q \\ AC^q \end{matrix}\right] - 2BAK$ (II, 7.)

ist $\left[\begin{matrix} BC^q - BG^q \end{matrix}\right] = 2BA \times KD$

od. (II, 8.) $4BOG$

$2BOG = BA \times KD.$

Endlich ziehe man FC, CK, welche aufeinander senkrecht seyn werden (III, 31.): und AN, AM mit ihnen parallel; welche auf CK, FC senkrecht stehen (I, 29.), und sie sowohl (III, 3.), als die Winkel BAC, FAC (I, 8.) halbiren werden.

So ist 1°. $BA \times AC : BLH = {}_2BA \times AC : \begin{cases} {}_2BLH & (V, 15.) \\ BA \times FD & (\text{Bew.}) \end{cases}$

$= \begin{bmatrix} {}_2AC \\ KF \end{bmatrix} : FD \quad (VI, 1.)$

$= KF^q : FC^q \quad (VI, 8. 20.)$

$= AF^q : FM^q \quad (VI, 2. 22.)$

$= \overline{\text{sin. tot.}}^2 : \begin{cases} \overline{\text{sin. FAM}}^2 \\ \overline{\text{sin. } \frac{1}{2} \text{FAC}}^2 \end{cases} (\S 11.)$

Ebenso 2°. $BA \times AC : BOG = {}_2BA \times AC : \begin{cases} {}_2BOG \\ BA \times KD \end{cases}$

$= \begin{bmatrix} {}_2AC \\ FK \end{bmatrix} : KD$

$= FK^q : KC^q$

$= AK^q : KN^q$

$= \overline{\text{sin. tot.}}^2 : \begin{cases} \overline{\text{sin. KAN}}^2 \\ \overline{\text{sin. } \frac{1}{2} \text{BAC}}^2 \end{cases}$

3°. $BOG : BLH = BA \times KD : BA \times FD \quad (V, 15.)$

$= KD : FD \quad (VI, 1.)$

$= FK \times KD : KF \times FD$

$= CK^q : CF^q \quad (VI, 8, 17.)$

$= AM^q : MF^q \quad (VI, 4. 22.)$

$= \overline{\text{s. t.}}^2 : \begin{cases} \overline{\text{Tg. FAM}}^2 \\ \overline{\text{Tg. } \frac{1}{2} \text{FAC}}^2 \end{cases} (\S. 63. f.)$

Ebenso 4°. $BLH : BOG = FD : KD$

$= CF^q : CK^q$

$= AN^q : NK^q$

$= \overline{\text{sin. tot.}}^2 : \begin{cases} \overline{\text{Tg. KAN}}^2 \\ \overline{\text{Tg. } \frac{1}{2} \text{BAC}}^2 \end{cases}$

§. 182.

Newton (Arithmet. univ. l. §. 170 cit.) leitet diese Regeln, so wie auch die §. 53. 58. auf eine sehr einfache Art aus seiner §. 170. beschriebenen Construktion (*Fig.* 76.) her.

Leztere nämlich betreffend sind

$$\text{sin. BAC} : \text{s. t.} = CD : AC = \frac{\sqrt{GF \times FH \times GE \times EH}}{2AB} : AC \text{ (§. 170.)}$$

$$= \sqrt{GF \times FH \times GE \times EH} : 2AB \times AC$$

$$\left.\begin{matrix}\text{sin. tot.-Cosin. BAC} \\ \text{sin. vers. BAC}\end{matrix}\right\} : \text{s. t.} = DE : AC = \frac{GE \times EH}{2AB} : AC \text{ (§. 170.)}$$

$$= GE \times EH : 2AB \times AC$$

Erstere aber betreffend, ist vermöge der Construktion und der §. 170. bemerkten Folgen derselben, der Winkel DCE $= F$ (VI, 8.) $= \frac{1}{2}$BAC (III, 20.): daher

$$\overline{\text{sin. } \tfrac{1}{2}BAC}^2 : \overline{\text{sin. tot.}}^2 = DE^2 : CE^2 = DE : EF \text{ (VI, 8. 20.)}$$

$$= \frac{GE \times EH}{2AB} : 2AC \text{ (§. 170.)} = \frac{GE}{2} \times \frac{EH}{2} : AB \times AC$$

$$\overline{\text{Cosin. } \tfrac{1}{2}BAC}^2 : \overline{\text{sin. tot.}}^2 = CD^2 : CE^2 = FD \times DE : FE \times ED$$

$$\text{(VI, 8. 17.)} = FD : FE$$

$$= \frac{GF \times FH}{2AB} : 2AC \text{ (§. 170.)} = \frac{GF}{2} \times \frac{FH}{2} : AB \times AC$$

$$\overline{\text{Tg. } \tfrac{1}{2}BAC}^2 : \overline{\text{sin. tot.}}^2 = ED^2 : CD^2 = ED : DF \text{ (VI, 8. 20.)}$$

$$= GE \times EH : GF \times FH = \frac{GE}{2} \times \frac{EH}{2} : \frac{GF}{2} \times \frac{FH}{2}$$

§. 183.

Boscowich leitet die erste Regel §. 55. aus seiner §. 169. beschriebenen Construktion so her:

AB : BO = sin. tot. : sin. BAO oder $\frac{1}{2}$BAC

AC : CR = sin. tot. : sin. CAR oder $\frac{1}{2}$BAC

$$AB \times AC : BO \times CR = \overline{\text{sin. tot.}}^2 : \overline{\text{sin. } \tfrac{1}{2}BAC}^2$$

Aber $BO \times CR = BL \times LC$ (§. 169.)

$= (\frac{1}{2}\text{Perim.} - AC)(\frac{1}{2}\text{Perim.} - AB)$ (§. 164.)

§. 184.

Die §. 57. f. angegebene Zurükführung der Regeln §. 55. auf §. 40. steht dem Wesentlichen nach in Klügels Analytischer Trigonometrie (Braunschweig 1770.) I. Kap. §. 7. II. Kap. §. 5. S. 11. 23.

Hr. Klügel leitet ferner (II. Kap. §. 5. 6. S. 23. f.) aus den Ausdrüken für sin. tot. ± Cosin. A (§. 58.) den für sin. A, auf welchen die Regel §. 53 hinauslauft; und daraus den für die Fläche des Dreyeks §. 48. 51. ungefähr auf folgende Art her:

Da (Fig. 11. 12.)

$2AB \times AC : (AB+AC+BC)(AB+AC-BC) = s.t. : st. + Cosin. A$

$2AB \times AC : (BC+AB-AC)(BC+AC-AB) = s.t. : st. - Cosin. A$ (§. 58.)

so ist 1)

$4AB^2 \times AC^2 : (AB+AC+BC)(AB+AC-BC)(BC+AB-AC)(BC+AC-AB) = st.^2 : \begin{cases} st.^2 - Cosin.\ A^2 \\ sin.\ A^2 \end{cases}$ (Note zu §. 43.)

$2AB \times AC : \sqrt{(AB+AC+BC)(AB+AC-BC)(BC+AB-AC)(BC+AC-AB)} = sin.\ tot. : sin.\ A$

2) $= AC : CD.$

$= 2AB \times AC : \begin{cases} 2AB \times CD \\ 4\triangle ABC \end{cases}$

und $4\triangle ABC = \sqrt{(AB+AC+BC)(AB+AC-BC)(BC+AB-AC)(BC+AC-AB)}.$

Der erste Hülfssaz §. 57. findet sich schon in der Compositio tabularum sinuum rectorum per Joannem de Regiomonte (§. 16. Note d S. 24.), Prop. III, fol. B. 2. B. auf ähnliche Art für spize Winkel ausgedrükt und bewiesen: Cujuslibet arcus quarta minoris sinus rectus est medio loco proportionalis inter medietatem semidiametri & sinum versum arcus duplicis.

§. 185.

Hr. Klügel giebt a. a. O. §. 3. S. 20. f. die §. 89. f. 97. ff. bewiesene Ausdrüke der Tangenten und Cotangenten der übrigen Winkel eines Dreyeks, dessen zwey Seiten und der Zwischenwinkel gegeben sind.

Leztere hat schon Vieta, wie oben (§. 154.) angezeigt worden ist.

Erstere stehen auch in Kästners Astron. Abhandl. I. Samml. (Göttingen 1772.) S. 9.

Ebendaselbst sind auch S. 12. die §. 77. erwiesene Ausdrücke der Sinus dieser Winkel angegeben: so wie auch die ihrer Cosinus, welche unter andern aus den der Tangenten und Sinus mittelst §. 67. folgen; wornach z. B. (Fig. 26. 27.)

$$\text{Tg.B} : \text{sin. tot.} = \text{sin.B} : \text{Cosin.B}$$

Daher (§. 89. 77.)

$$\frac{\text{sin.BAC}}{\text{sin.tot.}} : \frac{AB}{AC} - \frac{\text{Cosin.BAC}}{\text{sin. tot.}} = \frac{\text{sin.BAC}}{\sqrt{1 - \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 - \frac{2AB}{AC} \times \frac{\text{Cosin.BAC}}{\text{sin. tot.}}}} : \text{Cosin.B}$$

$$\text{oder } 1 : \frac{AB}{AC} - \frac{\text{Cosin.BAC}}{\text{sin. tot.}} = \frac{\text{sin. tot.}}{\sqrt{1 - \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 - \frac{2AB}{AC} \times \frac{\text{Cosin.BAC}}{\text{sin. tot.}}}} : \text{Cosin.B}$$

$$\text{Folglich Cosin.B} = \frac{\frac{AB}{AC}\text{sin. tot.} - \text{Cosin. BAC}}{\sqrt{1 - \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 - \frac{2AB}{AC} \times \frac{\text{Cosin. BAC}}{\text{sin. tot.}}}}.$$

§. 186.

Die §. 76. angezeigte Art, die dritte Seite eines Dreyecks, dessen zwey Seiten und der schiefe Zwischenwinkel gegeben sind, zu berechnen, trägt Snellius (Doctrin. triang. Lib. II. Prop. 14. n° 3. p. 81. sq.) so vor: Ut sinus totus ad sinum complementi dati anguli, ita duplex rectangulum sub cruribus ad differentiam inter quadrata crurum & quadratum basis. Et, si quidem angulus datus acutus existat, dematur a crurum quadratis; sin obtusus, iisdem addatur; & numerus hinc existens erit quadratum basis. So auch Cavalieri (Trigon. plan. Probl. 12. p. 20.)

§. 187.

Noch wendet Snellius (l. c. n°4. p. 82.) auf eben dieſen Fall ſeine §. 179. angeführte Proportion ſo an: Ut sinus totus ad sinum versum anguli dati, ita duplex rectangulum crurum ad excessum, quo quadratum basis superat quadratum differentiæ crurum; woraus mittelſt §. 57. die zweyte Regel §. 88. folgt.

Dieſe aus der Formel §. 76. abgeleitet (auf die ähnliche Art, wie in §. 58. die Regeln §. 55. aus §. 40.) findet ſich in Käſtners Aſtronomiſcher Abhandlungen zweyter Sammlung. Götting. 1774. S. 121. f.

§. 188.

Eben ſo leitet Hr. Hofr. Mayer (Gründl. und ausführl. Unterricht zur prakt. Geometrie. I. Th. Götting. 1777. S. 12. f.) aus der Regel §. 76. die erſte §. 88. ab.

§. 189.

Aus dieſer folgert Hr. Mayer ebendaſelbſt S. 13. (mittelſt der allgemeinen §. 10. f. vorangeſchikten Bemerkung: daß $\sqrt{B^2 - A^2} = \frac{B}{\text{sin. tot.}}\sqrt{\text{sin. tot.}^2 - \frac{A^2}{B^2}\text{sin. tot.}^2} =$

$\frac{B}{\text{sin. tot.}}\sqrt{\text{sin. tot.}^2 - \text{Cosin.}\,\psi^2} = \frac{B}{\text{sin. tot.}}\,\text{sin.}\,\psi$, wenn $\frac{A}{B}$ s. t. $= \text{Cosin.}\,\psi$): das mit §. 87. auf eines hinauslaufende Verfahren: Man ſuche den Hülfswinkel ψ mittelſt der Proportion $\frac{AB+AC}{2} : \sqrt{AB \times AC} = \text{Cosin.}\,\frac{1}{2}BAC : \text{sin.}\,\psi$;

ſo iſt sin. tot. : Cosin. ψ $= AB + AC$: BC.

Nämlich nach §. 87. iſt (*Fig.* 31. 32.)

$$\left.\begin{array}{rl} FL : FJ & = \text{sin. FBL} \\ \frac{AB+AC}{2} : \sqrt{AB \times AC} & = \text{Cosin.}\,\frac{1}{2}BAC \end{array}\right] : \text{sin. FBJ};$$

und sin. tot. : $\left[\begin{array}{ll} \text{sin. BFJ} = FB & : BJ \\ \text{Cosin. FBJ} = AB + AC & : BC. \end{array}\right.$

§. 190.

Der zweyte Ausdruk §. 88.

$$BC^2 = (AB-AC)^2 + 4AB \times AC \left(\frac{\sin. \frac{1}{2}BAC}{\sin. tot.}\right)^2$$

läßt sich auch so darstellen:

$$BC^2 = (AB-AC)^2 \left(1 + \frac{4AB \times AC}{(AB-AC)^2} \times \left(\frac{\sin. \frac{1}{2}BAC}{\sin. tot.}\right)^2\right);$$

und dieser verwandelt sich mittelst eines Hülfswinkels φ, für welchen $\frac{AB-AC}{2} : \sqrt{AB \times AC} = \sin. \frac{1}{2}BAC : Tg. \varphi$, in folgenden:

$$BC^2 = (AB-AC)^2 \left(1 + \left(\frac{Tg. \varphi}{\sin. tot.}\right)^2\right)$$

$$= (AB-AC)^2 \times \left(\frac{\sec. \varphi}{\sin. tot.}\right)^2$$

weil $\overline{\sin. tot.}^2 + \overline{Tg. \varphi}^2 = \overline{\sec. \varphi}^2$, nämlich (*Fig.* 23.) $BD^2 + DF^2 = BF^2$.

Daher $BC = (AB-AC) \frac{\sec. \varphi}{\sin. tot.} = (AB-AC) \frac{\sin. tot.}{Cosin. \varphi}$ (§. 72.)

Diese Art BC zu berechnen, giebt Cagnoli an (Traité de Trigon. p. 116.)

§. 191.

Die Formel §. 105. (S. 208. f.) für die Höhe und Fläche eines Dreyeks, dessen Grundlinie und die Winkel an derselben bikannt sind, werden, jene von Newton (Arithmet. univ. 1 §. 170. cit. Probl. I. p. 118.), diese von Oppel (Analys. triang. l. §. 121. cit. §. 81. p. 15.), auf ihre Art ausgedrükt und abgeleitet, angegeben. Hr. Klügel (Analyt. Trigon. II. Kap. §. 9. S. 28.) leitet die für die Höhe aus der Regel §. 97, verbunden mit §. 75. 72. her.

§. 192.

Der Ausdruk §. 106. (S. 211. *Fig.* 38.—41.) für die dritte Seite eines Dreyeks, dessen zwey Seiten und der

Gegenwinkel der einen gegeben sind, aus der Gleichung $BC^q = AB^q + AC^q - 2AB \times AC \frac{\text{Cosin. } A}{\text{sin. tot.}}$ (§. 76. S. 171.) gefolgert, und unter der Form

$$AC = AB\frac{\text{Cosin. } A}{\text{sin. tot.}} \pm \sqrt{\left(BC + AB\frac{\text{sin. } A}{\text{sin. tot.}}\right)\left(BC - AB\frac{\text{sin. } A}{\text{sin. tot.}}\right)}$$

dargestellt, findet sich in J. C. Schulze Taschenbuch für diejenigen, so gründliche Anwendungen der Meßkunst zu machen sich vorsetzen (Zweytes Heft. Berlin 1783. S. 354. f.); mit der Bemerkung, welche den §. 24. f. 106. gemachten entspricht: daß das Zeichen der Wurzelgröße so lange zweydeutig bleibe, als $BC < AB$, aber doch $BC > AB\frac{\text{sin. } A}{\text{sin. tot.}}$; die Zweydeutigkeit hingegen wegfalle, wenn $BC = AB$, oder $BC > AB$, da in diesem Falle jederzeit das positive Zeichen der Wurzelgröße genommen werden müsse.

§. 193.

Ebendaselbst wird (S. 361. ff.) zur Berechnung des Zwischenwinkels der gegebenen Seiten aus der Gleichung

$$\text{Cotg. } BAC = \frac{AB}{BC}\text{Cosec. } ABC - \text{Cotg. } ABC = \frac{\frac{AB}{BC}\overline{\text{sin. tot.}}^2 - \text{sin. tot. Cosin. } ABC}{\text{sin. } ABC},$$

(welche sich aus der auf den Fall, wenn in *Fig.* 38-41. AB, BC und der Winkel ABC bekannt wären, angewendeten Regel §. 90. 97. ff. ergiebt) mittelst allgemeiner Ausdrücke des Sinus und Cosinus eines Winkels durch die Tangente seiner Hälfte, die Formel hergeleitet:

$$\text{Tg. } \tfrac{1}{2}ABC = \frac{BC\frac{\text{Cosin. } A}{\text{st.}} \pm \sqrt{\left(BC + AB\frac{\text{sin. } A}{\text{st.}}\right)\left(BC - AB\frac{\text{sin. } A.}{\text{st.}}\right)}}{(AB + BC)\frac{\text{sin. } A.}{\text{st.}}}\text{sin. tot.};$$

mit beygefügter ähnlicher Bemerkung wie in dem vorhergehenden §.

Direct und unmittelbar läßt sich diese Formel so beweisen: In *Fig.* 80. 81. 82. 83. (welche den *Fig.* 39. 41. 38. 40. entsprechen) sey aus dem Mittelpunkt B mit dem Halbmesser BC, der Halbkreis KCF beschrieben; und in demselben die Sehnen CF, CK gezogen; deren letztere und das aus B auf AC gefällte Loth BE, oder ihre Verlängerungen, einander in M schneiden. Noch ziehe man KL aus K senkrecht auf BE; oder (I, 28.) parallel mit AC.

So sind die Winkel BKL = BAE (I, 29.), KFC = $\frac{1}{2}$ABC (III, 20.), FCK = Rechten (III, 31.); und (§. 64.)

$$FC : CK = \text{sin. tot.} : \text{Tg.} \begin{Bmatrix} KFC \\ \frac{1}{2}ABC \end{Bmatrix}$$

Aber $FC : FA = \text{sin. BAC} : \begin{Bmatrix} \text{sin. FCA oder ACJ} \\ \text{Cosin. ACK, weil FCK} \end{Bmatrix}$ und daher auch JCK = Rechten:

und da (VI, 4.) in *Fig.* 80. 81. 82.

$$CE : CM = KL : KM;$$

so ist (V, 12. 19.)

$$\left.\begin{matrix} \textit{Fig.}\ 80.\ KL + CE \\ \textit{Fig.}\ 81.\ KL - CE \\ \textit{Fig.}\ 82.\ CE - KL \end{matrix}\right\} : CK = CE : CM = \text{Cosin.} \begin{Bmatrix} ECM \\ ACK \end{Bmatrix} : \text{s.t.}$$

auch *Fig.* 83. $KL : CK = \text{Cosin.} \begin{Bmatrix} CKL \\ ACK \end{Bmatrix} : \text{s.t.}$

Folgl. FC Cosin. ACK = FA sin. BAC = (AB + BC) sin. BAC

$$CK \text{ Cosin. ACK} = \begin{cases} (KL + CE) \text{ sin. tot. } \textit{Fig.}\ 80. \\ (KL - CE) \text{ sin. tot. } \textit{Fig.}\ 81. \\ (CE - KL) \text{ sin. tot. } \textit{Fig.}\ 82. \\ KL \text{ sin. tot. } \textit{Fig.}\ 83. \end{cases}$$

und, weil $KL : \begin{Bmatrix} BK \\ BC \end{Bmatrix} = \text{Cosin. BKL} : \text{sin. tot.}$

$$= \text{Cosin. BAC} : \text{s. t. } \textit{Fig.}\ 80.\ 81.\ 83.$$

$$= \begin{Bmatrix} \text{Cosin. BAE} \\ -\text{Cosin. BAC} \end{Bmatrix} : \text{sin. tot. } \textit{Fig.}\ 82.$$

$$CK \text{ Cosin. ACK} = \begin{cases} BC \text{ Cosin. BAC} + CE \text{ s.t. } \textit{Fig.}\ 80.\ 82. \\ BC \text{ Cosin. BAC} - CE \text{ s.t. } \textit{Fig.}\ 81. \\ BC \text{ Cosin. BAC} \quad \textit{Fig.}\ 83. \end{cases}$$

Daher $FC : CK = FC \cdot \text{Cosin. } ACK : CK \cdot \text{Cosin. } ACK$

$= (AB+BC) \text{ sin. } BAC : \begin{cases} BC \cdot \text{Cosin. } BAC + CE & \text{s.t. Fig. 80. 82.} \\ BC \cdot \text{Cosin. } BAC - CE & \text{s.t. Fig. 81.} \\ BC \cdot \text{Cosin. } BAC & \text{Fig. 83.} \end{cases}$

$$= (AB+BC)\frac{\text{sin. } BAC}{\text{sin. tot.}} : \begin{cases} BC\frac{\text{Cosin. } BAC}{\text{sin. tot.}} + \sqrt{BC^2 - AB^2\left(\frac{\text{sin. } BAC}{\text{sin. tot.}}\right)^2} & (\S.\ 106.) \\ BC \cdot \text{Cosin.}\frac{BAC}{\text{sin. tot.}} - \sqrt{BC^2 - AB^2\left(\frac{\text{sin. } BAC}{\text{sin. tot.}}\right)^2} \\ BC \cdot \text{Cosin.}\frac{BAC}{\text{sin. tot.}} \end{cases}$$

und endlich

$$(AB+BC)\frac{\text{sin. } BAC}{\text{sin. tot.}} : BC\frac{\text{Cosin. } BAC}{\text{sin. tot.}} \pm \sqrt{BC^2 - AB^2\left(\frac{\text{sin. } BAC}{\text{sin. tot.}}\right)^2} = \text{sin. tot.} : \text{Tg. } \tfrac{1}{2} ABC$$

wo das Zeichen + gilt für die Fälle *Fig.* 80. 82., wenn der Winkel ACB spiz;

das Zeichen — für den Fall *Fig.* 81., wenn der Winkel ACB stumpf:

$\sqrt{BC^2 - AB^2\left(\frac{\text{sin. } BAC}{\text{sin. tot.}}\right)^2}$ oder $CE = 0$ ist, wenn der Winkel ACB (*Fig.* 83.) ein rechter ist (§. 106.).

§. 194.

Die §. 33. S. 77. gegebene Regel, in einem rechtwinklichten Dreyek, dessen Hypotenuse und eine Seite um den rechten Winkel gegeben, aber wenig von einander verschieden sind, ihren kleinen Zwischenwinkel genau zu berechnen, leitet Cagnoli (Traité de Trigonom. p. 109.) aus der Proportion zu Anfang des §. 33. mittelst §. 57. folgendermassen her:

$BC : AB = \text{sin. tot.} : \text{Cosin. } ABC$ (*Fig.* 13.)

folglich $BC : BC - AB = \text{sin. tot.} : \text{sin. tot.} - \text{Cosin. } ABC$

$= \text{sin. tot.}^2 : 2\text{sin.}\tfrac{1}{2} ABC^2$ (§. 57.)

Noch giebt er ebendaselbst für diesen Fall folgendes Verfahren an:

Auch $BC+AB : BC-AB$

$= \text{sin. tot.} + \text{Cosin. } ABC : \text{sin. tot.} - \text{Cosin. } ABC$

$= \overline{\text{Cosin. } \frac{1}{2}ABC}^2 : \overline{\text{sin. } \frac{1}{2}ABC}^2$ (§. 57.)

$= \overline{\text{sin. tot.}}^2 : \overline{\text{Tg. } \frac{1}{2}ABC}^2$ (§. 67.)

daher $\text{Tg. } \frac{1}{2}ABC = \text{sin. tot.} \sqrt{\frac{BC-AB}{BC+AB}}$.

Lezterer Ausdruk folgt aus dem des vorhergehenden §: da, wenn der gegebene Gegenwinkel A von BC ein rechter iſt, sin A = sin. tot., und Cosin. A = o werden (§. 15. 41. 43.); folglich alsdenn

$$\text{Tg. } \frac{1}{2}ABC = \frac{\sqrt{(BC+AB)(BC-AB)}}{BC+AB} \text{sin. tot.} = \text{s. t.} \sqrt{\frac{BC-AB}{BC+AB}}.$$

Zuſaz zu §. 121. 122. S. 309. 313.
die dorten erwähnte polygonometriſche Säze betreffend.

§. 195.

In *Fig.* 84. 85. ſeyen $B\gamma$ mit CDE, $B\delta$ mit DED, $B\varepsilon$ mit EFE, $B\zeta$ mit FGF, $B\eta$ mit GH parallel gezogen.

So ſind (I, 29. und Zuſ.) die Winkel

$\mathfrak{B}B\gamma = \mathfrak{B}CD$, $\gamma B\delta = \mathfrak{C}DE$, $\delta B\varepsilon = \mathfrak{D}EF$,
$\varepsilon B\zeta = \mathfrak{E}FG$, $\zeta B\eta = \mathfrak{F}GH$:

daher $\mathfrak{A}B\gamma = \mathfrak{A}BC + \mathfrak{B}B\gamma$; $\mathfrak{A}B\delta = \mathfrak{A}B\gamma + \gamma B\delta$
$= \mathfrak{A}BC + \mathfrak{B}CD$ $= \mathfrak{A}BC + \mathfrak{B}CD + \mathfrak{C}DE$

$\mathfrak{A}B\varepsilon = \mathfrak{A}B\delta \pm \delta B\varepsilon$
$= \mathfrak{A}BC + \mathfrak{B}CD + \mathfrak{C}DE \pm \mathfrak{D}EF$

$\mathfrak{A}B\zeta = \mathfrak{A}B\varepsilon + \varepsilon B\zeta$
$= \mathfrak{A}BC + \mathfrak{B}CD + \mathfrak{C}DE \pm \mathfrak{D}EF + \mathfrak{E}FG$

$\mathfrak{A}B\eta = \mathfrak{A}B\zeta + \zeta B\eta$
$= \mathfrak{A}BC + \mathfrak{B}CD + \mathfrak{C}DE \pm \mathfrak{D}EF + \mathfrak{E}FG + \mathfrak{F}GH$

§. 196.

Aus den Winkelspizen C, D, E, F, G, H seyen auf AB die Perpendikel CC', DD', EE', FF', GG', HH' gefällt; und durch C, D, E, F, G seyen Cc, Dd, Ee, Ff, Gg parallel gezogen mit AB.

So sind (I, 29.) die Winkel

$$DCc = \gamma BA = 2R - \mathfrak{A}B\gamma = 2R - (\mathfrak{A}BC + \mathfrak{B}CD)$$

$$EDd = \delta BA = 2R - \mathfrak{A}B\delta = 2R - (\mathfrak{A}BC + \mathfrak{B}CD + \mathfrak{C}DE) \quad \textit{Fig. 84.}$$

$$= \mathfrak{A}B\delta - 2R = (\mathfrak{A}BC + \mathfrak{B}CD + \mathfrak{C}DE) - 2R \quad \textit{Fig. 85.}$$

$$FEe = \varepsilon BA = 2R - \mathfrak{A}B\varepsilon = 2R - (\mathfrak{A}BC + \mathfrak{B}CD + \mathfrak{C}DE \pm \mathfrak{D}EF)$$

$$GFf = \zeta BA = \mathfrak{A}B\zeta - 2R$$

$$= \mathfrak{A}BC + \mathfrak{B}CD + \mathfrak{C}DE \pm \mathfrak{D}EF + \mathfrak{E}FG - 2R$$

$$HGg = \eta BA = \mathfrak{A}B\eta - 2R$$

$$= \mathfrak{A}BC + \mathfrak{B}CD + \mathfrak{C}DE \pm \mathfrak{D}EF + \mathfrak{E}FG + \mathfrak{F}GH - 2R$$

§. 197.

Bezeichnet man also durch B, C, D, E, F, G die Ergänzungen zu zwey rechten Winkeln der an den Spizen B, C, D, E, F, G einwärts der Figur von ihren Seiten gemachten Winkel, mit der Bemerkung, daß für convexe Winkel, wie bey E in *Fig.* 85., diese Ergänzung negativ wird (Vgl. §. 121. n°. 5. S. 309.): so ergeben sich (§. 14. 43. 113. 115.)

$$CC' = BC\frac{\text{sin. CBC'}}{\text{sin. tot.}} = BC\frac{\text{sin. B}}{\text{sin. tot.}} \qquad BC' = BC\frac{\text{Cosin. CBC'}}{\text{sin. tot.}} = BC\frac{\text{Cosin. B}}{\text{sin. tot.}}$$

$$Dc = CD\frac{\text{sin. DCc}}{\text{sin. tot.}} = CD\frac{\text{sin. (B+C)}}{\text{sin. tot.}} \qquad C'D' = Cc = CD\frac{\text{Cosin. DCc}}{\text{sin. tot.}} = -CD\frac{\text{Cosin. (B+C)}}{\text{sin. tot.}}$$

$$Ed = DE\frac{\text{sin. EDd}}{\text{sin. tot.}} \qquad D'E' = Dd = CD\frac{\text{Cosin. EDd}}{\text{sin. tot.}}$$

$$= +DE\frac{\text{sin.}(B+C+D)}{\text{sin. tot.}} \textit{ Fig. 84.} \qquad = -CD\frac{\text{Cosin.}(B+C+D)}{\text{sin. tot.}}$$

$$= -DE\frac{\text{sin.}(B+C+D)}{\text{sin. tot.}} \textit{ Fig. 85.}$$

$$Fe = EF\frac{\text{sin. FEe}}{\text{sin. tot.}} \qquad E'F' = Ee = EF\frac{\text{Cosin. FEe}}{\text{sin. tot.}}$$

$$= EF\frac{\text{sin.}(B+C+D+E)}{\text{sin. tot.}} \qquad = -EF\frac{\text{Cosin.}(B+C+D+E)}{\text{sin. tot.}}$$

$$Gf = FG\frac{\text{sin. GFf}}{\text{sin. tot.}} \qquad F'G' = Ff = FG\frac{\text{Cosin. GFf}}{\text{sin. tot.}}$$

$$= -FG\frac{\text{sin.}(B+C+D+E+F)}{\text{sin. tot.}} \qquad = -FG\frac{\text{Cosin.}(B+C+D+E+F)}{\text{sin. tot.}}$$

$$Hg = GH\frac{\text{sin. HGg}}{\text{sin. tot.}} \qquad G'H' = Gg = GH\frac{\text{Cosin. HGg}}{\text{sin. tot.}}$$

$$= -GH\frac{\text{sin.}(B+C+D+E+F+G)}{\text{sin. tot.}} \qquad = -GH\frac{\text{Cosin.}(B+C+D+E+F+G)}{\text{sin. tot.}}$$

§. 198.

Daher sind die Perpendikel

$$CC' = BC\frac{\text{sin } B}{\text{sin. tot.}}$$

$$DD' = CC' + Dc = BC\frac{\text{sin. } B}{\text{sin. tot.}} + CD\frac{\text{sin.}(B+C)}{\text{sin. tot.}}$$

$$EE' = DD' \pm Ed = BC\frac{\text{sin } B}{\text{sin. tot.}} + CD\frac{\text{sin.}(B+C)}{\text{sin. tot.}} + DE\frac{\text{sin.}(B+C+D)}{\text{sin. tot.}}$$

$$FF' = EE' + Fe = BC\frac{\text{sin. } B}{\text{sin. tot.}} + CD\frac{\text{sin.}(B+C)}{\text{sin. tot.}} + DE\frac{\text{sin.}(B+C+D)}{\text{sin. tot.}} + EF\frac{\text{sin.}(B+C+D+E)}{\text{sin. tot.}}$$

$$GG' = FF' - Gf$$

$$= BC\frac{\text{sin. } B}{\text{sin. tot.}} + CD\frac{\text{sin.}(B+C)}{\text{sin. tot.}} + DE\frac{\text{sin.}(B+C+D)}{\text{sin. tot.}} + EF\frac{\text{sin.}(B+C+D+E)}{\text{sin. tot.}} + FG\frac{\text{sin.}(B+C+D+E+F)}{\text{sin. tot.}}$$

$$HH' = GG' - Hg \textit{ (Fig. 84.)} = Hg - GG' = -(GG' - HG) \textit{ Fig. 85.}$$

$$= \pm\left(BC\frac{\text{sin. } B}{\text{sin. tot.}} + CD\frac{\text{sin.}(B+C)}{\text{sin. tot.}} + DE\frac{\text{sin.}(B+C+D)}{\text{sin. tot.}} + EF\frac{\text{sin.}(B+C+D+E)}{\text{sin. tot.}} + FG\frac{\text{sin.}(B+C+D+E+F)}{\text{sin. tot.}} + GH\frac{\text{sin.}(B+C+D+E+F+G)}{\text{sin. tot.}}\right)$$

§. 199.

Und die zwischen A und den auf AB gefällten Perpendikeln liegende Abschnitte von AB:

$$AC' = AB + BC' = AB + BC\frac{\text{Cosin. B}}{\text{sin. tot.}}$$

$$AD' = AC' - C'D' = AB + BC\frac{\text{Cos. B}}{\text{sin. tot.}} + CD\frac{\text{Cos. (B+C)}}{\text{sin. tot.}}$$

$$AE' = AD' - D'E' = AB + BC\frac{\text{Cos. B}}{\text{sin. tot.}} + CD\frac{\text{Cos. (B+C)}}{\text{sin. tot.}} + DE\frac{\text{Cos. (B+C+D)}}{\text{sin. tot.}}$$

$$AF' = AE' - E'F' = AB + BC\frac{\text{Cos. B}}{\text{sin. tot.}} + CD\frac{\text{Cos. (B+C)}}{\text{sin. tot.}} + DE\frac{\text{Cos. (B+C+D)}}{\text{sin. tot.}} + EF\frac{\text{Cos. (B+C+D+E)}}{\text{sin. tot.}}$$

$$AG' = AF' - F'G' \text{ (Fig. 84.)} = F'G' - AF' = -(AF' - F'G') \text{ (Fig. 85)}$$

$$= \pm\left(AB + BC\frac{\text{Cos. B}}{\text{sin. tot.}} + CD\frac{\text{Cos. (B+C)}}{\text{sin. tot.}} + DE\frac{\text{Cos. (B+C+D)}}{\text{sin. tot.}} + EF\frac{\text{Cos. (B+C+D+E)}}{\text{sin. tot.}} + FG\frac{\text{Cos. (B+C+D+E+F)}}{\text{sin. tot.}}\right)$$

$$AH' = G'H' - AG' = -AG' + G'H' \text{ (Fig. 84.)} = +AG' + G'H' \text{ (Fig. 85.)}$$

$$= -\left(AB + BC\frac{\text{Cos. B}}{\text{sin. tot.}} + CD\frac{\text{Cos. (B+C)}}{\text{sin. tot.}} + DE\frac{\text{Cos. (B+C+D)}}{\text{sin. tot.}} + EF\frac{\text{Cos. (B+C+D+E)}}{\text{sin. tot.}} + FG\frac{\text{Cos. (B+C+D+E+F)}}{\text{sin. tot.}} + GH\frac{\text{Cos. (B+C+D+E+F+G)}}{\text{sin. tot.}}\right)$$

§. 200.

In den Figuren ABC, ABCD, ABCDE, ABCDEF, ABCDEFG, ABCDEFGH seyen die Seiten, eine (nämlich AC, AD, AE, AF, AG, AH) ausgenommen, gegeben; samt den Zwischenwinkeln der gegebenen Seiten, folglich auch den nach §. 197. durch B, C, D, E, F, G, bezeichneten Ergänzungen derselben zu zwey rechten Winkeln, oder den äusseren Winkeln der Figuren.

So ergeben sich mittelst §. 198. folgende Ausdrüke des doppelten Inhalts dieser Figuren:

$$\left.\begin{array}{l} 1^\circ.\ 2\times\text{Dreyek ABC} = AB\times CC' = AB\times BC\frac{\sin. B}{\sin. tot.} \\ \text{Ebenso}\quad 2\times\text{Dreyek BCD} \qquad = BC\times CD\frac{\sin. C}{\sin. tot.} \end{array}\right\}$$

übereinstimmend mit §. 75. S. 170.

$$2^\circ.\ 2\times\text{Vrk.ABCD} = \left\{\begin{array}{l} 2\times\text{Drk.ABD} \\ AB\times DD' \end{array}\right\} + 2\times\text{Drk.BCD}$$

$$\left.\begin{array}{l} = AB\times BC\frac{\sin. B}{\sin. tot.} + AB\times CD\frac{\sin.(B+C)}{\sin. tot.} + BC\times CD\frac{\sin. C}{\sin. tot.} \\ \text{Ebenso}\quad 2\times\text{Vierek BCDE} \\ = BC\times CD\frac{\sin. C}{\sin. tot.} + BC\times DE\frac{\sin.(C+D)}{\sin. tot.} + CD\times DE\frac{\sin. D}{\sin. tot.} \end{array}\right\}$$

übereinstimmend mit §. 114. S. 244. f.

$$3^\circ.\ 2\times\text{Fünfek ABCDE} = \left\{\begin{array}{l} 2\times\text{Dreyek ABE} \\ AB\times EE' \end{array}\right\} + 2\times\text{Vierek ABCDE}$$

$$= \left\{\begin{array}{l} AB\times BC\frac{\sin. B}{\sin. tot.} + AB\times CD\frac{\sin.(B+C)}{\sin. tot.} + AB\times DE\frac{\sin.(B+C+D)}{\sin. tot.} \\ + BC\times CD\frac{\sin. C}{\sin. tot.} + BC\times DE\frac{\sin.(C+D)}{\sin. tot.} + CD\times DE\frac{\sin. D}{\sin. tot.} \end{array}\right.$$

$$\text{Ebenso}\quad 2\times\text{Fünfek BCDEF}$$

$$= \left\{\begin{array}{l} BC\times CD\frac{\sin. C}{\sin. tot.} + BC\times DE\frac{\sin.(C+D)}{\sin. tot.} + BC\times EF\frac{\sin.(C+D+E)}{\sin. tot.} \\ + CD\times DE\frac{\sin. D}{\sin. tot.} + CD\times EF\frac{\sin.(D+E)}{\sin. tot.} + DE\times EF\frac{\sin. E}{\sin. tot.} \end{array}\right.$$

$$4^\circ.\ 2\times\text{Sechsek ABCDEF} = \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} 2\times\text{Dreyek ABF} \\ AB\times FF' \end{array}\right\} + 2\times\text{Fünfek BCDEF}$$

$$= \left\{\begin{array}{l} AB\times BC\frac{\sin. B}{\sin. tot.} + AB\times CD\frac{\sin.(B+C)}{\sin. tot.} + AB\times DE\frac{\sin.(B+C+D)}{\sin. tot.} \\ + AB\times EF\frac{\sin.(B+C+D+E)}{\sin. tot.} + BC\times CD\frac{\sin. C}{\sin. tot.} + BC\times DE\frac{\sin.(C+D)}{\sin. tot.} \\ + BC\times EF\frac{\sin.(C+D+E)}{\sin. tot.} + CD\times DE\frac{\sin. D}{\sin. tot.} + CD\times EF\frac{\sin.(D+E)}{\sin. tot.} \\ + DE\times EF\frac{\sin. E}{\sin. tot.} \end{array}\right.$$

Ebenſo 2 × Sechsek BCDEFG

$$= \begin{cases} BC\times CD\frac{\sin. C}{\sin. tot.} + BC\times DE\frac{\sin.(C+D)}{\sin. tot.} + BC\times EF\frac{\sin.(C+D+E)}{\sin. tot.} \\ +BC\times FG\frac{\sin.(C+D+E+F)}{\sin. tot.} + CD\times DE\frac{\sin. D}{\sin. tot.} + CD\times EF\frac{\sin.(D+E)}{\sin. tot.} \\ +CD\times FG\frac{\sin.(D+E+F)}{\sin. tot.} + DE\times EF\frac{\sin. E}{\sin. tot.} + DE\times FG\frac{\sin.(E+F)}{\sin. tot.} \\ +EF\times FG\frac{\sin. F}{\sin. tot.} \end{cases}$$

5°. 2 × Siebenek ABCDEFG

$$= \left\{ \begin{matrix} 2\times \text{Dreyek } ABG \\ AB\times GG' \end{matrix} \right\} + 2\times \text{Sechsek } BCDEFG$$

$$= \begin{cases} AB\times BC\frac{\sin. B}{\sin. tot.} + AB\times CD\frac{\sin.(B+C)}{\sin. tot.} + AB\times DE\frac{\sin.(B+C+D)}{\sin. tot.} \\ +AB\times EF\frac{\sin.(B+C+D+E)}{\sin. tot.} + AB\times FG\frac{\sin.(B+C+D+E+F)}{\sin. tot.} \\ +BC\times CD\frac{\sin. C}{\sin. tot.} + BC\times DE\frac{\sin.(C+D)}{\sin. tot.} + BC\times EF\frac{\sin.(C+D+E)}{\sin. tot.} \\ +BC.FG\frac{\sin.(C+D+E+F)}{\sin. tot.} + CD.DE\frac{\sin. D}{\sin. tot.} + CD.EF\frac{\sin.(D+E)}{\sin. tot.} \\ +CD.FG\frac{\sin.(D+E+F)}{\sin. tot.} + DE.EF\frac{\sin. E}{\sin. tot.} + DE.FG\frac{\sin.(E+F)}{\sin. tot.} \\ +EF.FG\frac{\sin. F}{\sin. tot.} \end{cases}$$

Ebenſo 2. Siebenek BCDEFGH

$$= \begin{cases} BC.CD\frac{\sin. C}{\sin. tot.} + BC.DE\frac{\sin.(C+D)}{\sin. tot.} + BC.EF\frac{\sin.(C+D+E)}{\sin. tot.} \\ +BC.FG\frac{\sin.(C+D+E+F)}{\sin. tot.} + BC.GH\frac{\sin.(C+D+E+F+G)}{\sin. tot.} \\ +CD.DE\frac{\sin. D}{\sin. tot.} + CD.EF\frac{\sin.(D+E)}{\sin. tot.} + CD.FG\frac{\sin.(D+E+F)}{\sin. tot.} \\ +CD.GH\frac{\sin.(D+E+F+G)}{\sin. tot.} + DE.EF\frac{\sin. E}{\sin. tot.} + DE.FG\frac{\sin.(E+F)}{\sin. tot.} \\ +DE.GH\frac{\sin.(E+F+G)}{\sin. tot.} + EF.FG\frac{\sin. F}{\sin. tot.} + EF.GH\frac{\sin.(F+G)}{\sin. tot.} \\ +FG.GH\frac{\sin. G}{\sin. tot.} \end{cases}$$

6°. 2. Achtek ABCDEFGH

$$= \pm \left\{ \begin{matrix} 2.\text{ Dreyek } ABH \\ AB, HH' \end{matrix} \right\} + 2.\text{ Siebenek } BCDEFGH$$

$$= \left\{ \begin{matrix} AB.BC\frac{\sin.B}{\sin.tot.} + AB.CD\frac{\sin.(B+C)}{\sin.tot.} + AB.DE\frac{\sin.(B+C+D)}{\sin.tot.} \\ + AB.EF\frac{\sin.(B+C+D+E)}{\sin.tot.} + AB.FG\frac{\sin.(B+C+D+E+F)}{\sin.tot.} \\ + AB.GH\frac{\sin.(B+C+D+E+F+G)}{\sin.tot.} + BC.CD\frac{\sin.C}{\sin.tot.} \\ + BC.DE\frac{\sin.(C+D)}{\sin.tot.} + BC.EF\frac{\sin.(C+D+E)}{\sin.tot.} \\ + BC.FG\frac{\sin.(C+D+E+F)}{\sin.tot.} + BC.GH\frac{\sin.(C+D+E+F+G)}{\sin.tot.} \\ + CD.DE\frac{\sin.D}{\sin.tot.} + CD.EF\frac{\sin.(D+E)}{\sin.tot.} + CD.FG\frac{\sin.(D+E+F)}{\sin.tot.} \\ + CD.GH\frac{\sin.(D+E+F+G)}{\sin.tot.} + DE.EF\frac{\sin.E}{\sin.tot.} \\ + DE.FG\frac{\sin.(E+F)}{\sin.tot.} + DE.GH\frac{\sin.(E+F+G)}{\sin.tot.} \\ + EF.FG\frac{\sin.F}{\sin.tot.} + EF.GH\frac{\sin.(F+G)}{\sin.tot.} + FG.GH\frac{\sin.G}{\sin.tot.} \end{matrix} \right.$$

§. 201.

Der Inhalt jeder geradlinichten Figur, deren Seiten, weniger eine, samt den Zwischenwinkeln derselben, gegeben sind, hat also zum Maaß die halbe Summe der Producte von je zwey und zwey dieser Seiten, und dem durch den Sinus totus dividirten Sinus der Summe der zwischen dieselbe fallenden äussern Winkel der Figur.

Wenn nämlich diese Regel für eine geradlinichte Figur von irgend einer Anzahl Seiten gilt; so hat sie vermöge der Deductionen §. 198. 200. auch bey der eine Seite mehr habenden Figur statt.

§. 202.

Eben dieser Figuren unbekannte Seiten AC, AD, AE, ... AH, und die Tangenten oder Cotangenten

der an denselben liegenden Winkel bey A, ergeben sich nach §. 61. 64. aus den rechtwinklichten Dreyeken ACC', ADD', AEE', ... AHH', deren Seiten um die rechte Winkel in §. 198. 199. durch die gegebenen Stücke ausgedrükt sind.

Vgl. §. 76. S. 171. §. 89. f. 99. S. 189. f. 200. §. 114. f. S. 246. f. §. 122. S. 312.

§. 203.

Sind in den Figuren ABC, ABCD, ABDE, ABEF, u. s. w. alle Winkel, und die an einander liegende Seiten, weniger zwey (nämlich die zwey BA und AC, BA und AD, BA und AE, BA und AF, u. s. w.), gegeben: so erhält man mittelst der rechtwinklichten Dreyeke ACC, ADD, AEE, AFF, u. s. w. deren Winkel, und nach §. 198. die Seiten CC', DD', EE', FF', u. s. w. gegeben sind, Ausdrüke der unbekannten Seiten AC, AD, AE, AF, u. s. w. durch die gegebenen Stüke; denen analoge für AB aus der Fällung der Perpendikel auf die andere unbekannte Seiten der Figuren folgen müssen.

So werden in dem Dreyek ABC

$$AC = CC' \frac{\text{sin. tot.}}{\text{sin. BAC}} \text{ (§. 24.)} = BC \frac{\text{sin. B}}{\text{sin. BAC}} \text{ (§. 198.)}$$

daher auch $AB = BC \frac{\text{sin.}(2R - ACB)}{\text{sin. BAC}}$

übereinstimmend mit §. 24.

In dem Vierek ABCD

$$AD = DD' \frac{\text{sin. tot.}}{\text{sin. BAD}} \text{ (§. 24.)} = \frac{BC \text{sin. B} + CD \text{sin.}(B+C)}{\text{sin. BAD}} \text{ (§. 198.)}$$

daher $AB = \frac{DC \text{sin.}(2R - ADC) + CB \text{sin.}(2R - ADC + C)}{\text{sin. BAD}}$

In dem Fünfek ABCDE

$$AE = EE' \frac{\text{sin. tot.}}{\text{sin. BAE}} \text{ (§. 24.)}$$

$$= \frac{BC \text{sin. B} + CD \text{sin.}(B+C) + DE \text{sin.}(B+C+D)}{\text{sin. BAE}} \text{ (§. 198.)}$$

daher AB

$$= \frac{ED \text{sin.}(2R - AED) + DC \text{sin.}(2R - AED + D) + CB \text{sin.}(2R - AED + D + C)}{\text{sin. BAE}}$$

u. s. w. Vgl. §. 121. S. 308.

§. 204.

Hr. Lhuilier folgert (Polygonometrie. Geneve 1789. §. V—VIII.) den Satz §. 201. unmittelbar aus dem §. 75. für Dreyeke erwiesenen mittelst einiger analytisch trigonometrischen Lehnsätze; leitet alsdann (§. XIV.) aus dem Satz §. 201. die Ausdrüke der Perpendikel §. 198. her; und fügt (§. XVII. f.) die §. 197. 198. 199. angegebene unmittelbare Deduction der dortigen Formeln bey, nur daß er (statt der durch B mit den Seiten der Figur gezogenen Parallelen) die Seiten der Figur bis an AB verlängert.

Weitere Zusätze und Verbesserungen.

S. 5. lezte Zeile LM^q statt LM_q

S. 23. Note c. Hr. von Murr giebt in seiner Notitia trium codicum autographorum Joh. Regiomontani (Norimb. 1801. p. 3. sq) folgende umständlichere Nachricht: Celeberr. astronomus Joh. Mullerus natus est in pago Vnfind prope Regiomontem (Königsberg) in Ducatu Saxo-Hildburghausano Franconiæ. Id me d. 18. Dec. 1793. docuit Dn. Buchenroeder, Scholæ Regiomontanæ Rector. Alles, was ich in einem alten Register von dem berühmten Regiomontanus aufgefunden habe, ist dieses: Johannes Müller natus anno 1436. den 6 Junius. Sein Vater war Johannes Müller der ältere, ein Müller zu Unfind. Seine Schwester verheirathete sich an den hiesigen Bürgermeister Schirling. Diese Nachrichten fand der um die Geschichte unsers Fürstenthums verdiente Krause in der Handbibel seines Verwandten, die durch Erbschaft auf ihn kam, aufgezeichnet. Dieser sein Verwandter hieß Wolffrum, und war von A. 1594 — 95. Amtsschösser allhier — Die Zeit, wann Regiomontanus die hiesige Schule besuchte, fand ich nicht bestimmt — Grammaticam domi edoctus, 1448. ætatis anno circiter duodecimo a parentibus Lipsiam missus est, ibique Arithmeticæ & Geometriæ operam navavit. Sub annum

1451. astronomiæ amore flagrans Vindobonam ad Georgium de Peurbach profectus est. —

S. 36. f. Note h. Ein Datum zu der Aufenthaltszeit des Rhäticus in Leipzig enthält folgender Titel einer Ausgabe der Elemente: Ευκλειδε στοιχειων βιβλια εξ Euclidis elementorum geometricorum Libri sex, conversi in latinum sermonem a Joach. Camerario. Edebat Lipsiæ Georg Joach. Rhet. Exprimente Valentino Papa. Anno MDXLIX. (Kästners Gesch. d. Math. 1 B. S. 347.)

Der S. 37. erwähnte, den 25 August 1563. von Ramus aus Paris an Rhäticus in Cracau geschriebene Brief steht in Petri Rami — & Audomari Talæi collectaneæ Præfationes, Epistolæ, Orationes. Marpurgi 1599. p. 213. sqq. Vgl. ibid. p. 432.

S. 37. Zeile 3. von unten ist beyzufügen: worunter einer mit der Aufschrift: Canon recens emendatus a Barth. Pitisco. Vgl. den Zusatz zu S. 151.

S. 37. Zeile 2. von unten lese man §. 69. Note e. statt §. 67. Note d.

64.	4.	sin. tot: sin. B	statt sin. tot. sin. B
37.	15. von oben	woraus	statt voraus
79.	10. von unten	39″	statt 39‴
81.	10. von oben	$AC^q = 169$	statt $BC^q = 169$
84.	14.	1,7403627	statt 1,7403827
95.	12. von unten	$AB^q + AC^q - BC^q$	statt $AB^q + AC^q - AB^q$
104.	6.	§. 108. S. 218.	statt §. 97.

S. 134. Z. 2. lese man: auf einzelne Minuten, und für den letzten Grad des Quadranten von zehn zu zehn Secunden, ausgedehnter Canon foecundus mit beigefügten Differenzen.

S. 134. Zeile 12. von oben lese man §. 14. Note b. statt §. 14. Note d.

141.	12.	Note e.	statt Note d.
143.	2. von unten	Note d.	statt Note c.

Den in der Note e. zu §. 69. S. 141. ff. angeführten, den Dialogus und älteren Canon von Rhäticus betreffen-

den Stellen kann noch das §. 146. S. 352. aus Finks Geometria rotundi beygebrachte, und folgendes aus dem S. 37. und 419. erwähnten Brief von Ramus an Rhäticus beygefügt worden: Tandem canonis tui libellus (quem inter autores ejusdem doctrinæ complures ad hoc studium mihi aliquot ante annis seposueram) iterum atque iterum perlectus, ac subinde repetitus, mirifice nos excitavit ad bene sperandum; cum [ab] mathematico (in numeris præsertim diligenter exercitato) polliceretur Astrologiam, non solum inventi Pythagorei & Gabrei, sed infinitis tabellarum centuriis vacuam prorsus ac liberam. Hic vero te ex animo vereque complexus sum — protinusque tuos *de* triangulis deque motibus inæqualibus libros per omnes bibliopolarum officinas requirendos curavi; sed aliud consequi non potui, quam quod crediderim abs te nondum editos esse. Interea rediit ad nos e Polonia Calonius Portanus, nobilis adolescens, quondam noster discipulus — multaque mihi curiosius percontanti de tua singulari eruditione, de libris triangulorum & inæqualium motuum, deque compluribus aliis abs te conscriptis, ita diserte ac jucunde narravit, ut me tui cupiditate totum incenderet; addidit etiam, te nonnullo invisendæ Galliæ desiderio teneri; quæ res mihi caussa fuit non solum amoris erga te mei declarandi, omniaque amantissimi hospitis, si Lutetiam veneris, studia officiaque pollicendi; sed multo magis eadem caussa fuit solicitandi & cohortandi tui, ne tam nobiles tamque seculis omnibus profuturæ meditationes perirent, sed protinus in lucem prodirent, quin etiam his altiora præstares. Excitasti canonis illius promisso non solum in Germania tota (quæ jam pridem una mathematum tutelam custodiamque suscepit), sed apud exteras nationes expectationem laudis admirabilem; quam agedum sustine fide, constantia, virtute.

Auch Hutton kannte diese Schrift des Rhäticus nicht; wie aus folgender Stelle seiner Introduction (p. 4 S. Note a. zu §. 17. S. 42.) erhellet, nach welcher er auch das Werk

von Maurolycus, und wie es scheint, das von Rheinhold, nicht aus eigener Ansicht gekannt, wenigstens in diesem die S. 141. f. daraus angeführte Stelle übersehen hat: In 1553. was published the Canon foecundus, or Table of tangents, of Erasmus Reinhold — To Franciscus Maurolycus, Abbot of Messina in Sicily, we owe the introduction of the Tabula benefica, or Canon of secants, which came out about the same time, or a little before. But Lansbergius erroneously ascribes this to Rheticus. And the tangents and secants are both ascribed to Reinhold by Briggs in his Mathematica ab antiquis minus cognita (p. 30. Appendix to Ward's Lives of the Professors of Gresham college.)

Zu S. 151. §. 71. Note a. Die Tangententafel von Clavius stimmt ganz mit der Rheinholdischen überein. Die von Fink und Lansberg stimmen mit einander überein; weichen aber von der Rheinholdischen ab in den Tangenten von 7, 10, 53, 56, 57 Minuten des letzten Grads des Quadranten; welche (die von 89°53′ ausgenommen) weniger unrichtig sind als die Rheinholdischen. In ihren Secantentafeln stimmen Fink, Clavius und Lansberg überein.

Tangenten und Secanten sind in diesen Tafeln für alle Minuten des ganzen Quadranten bis auf zehn Milliontheile des Halbmessers, oder in sieben Decimalziffern für den Halbmesser = 1 ausgedrükt: statt daß sie in den jetzt gewöhnlichen kleineren Tafeln nach dem ersten Viertel des 84ten Grads, wo sie gröſſer als 10 werden, nur bis auf sechs; und von 89°26′ an, wo sie über 100 steigen, nur bis auf fünf oder vier Decimalstellen angegeben werden.

Von diesen ersten Tangenten und Secantentafeln weichen, besonders in den letzten Graden des Quadranten, sowohl die in dem von Otho herausgegebenen Magnus canon Rhætici (S. §. 62. S. 135. f.) als die in Lansbergs Triangulorum geometria in seinen Opera omnia (Middelburgi 1663. fol.); und diese wieder, wiewohl weniger beträchtlich, von einander ab. Der Text der Lansbergischen Schrift ist in der neuen Ausgabe derselben ungeändert ge-

blieben; selbst die daraus am Ende der Note c. zu §. 69. (S. 144.) angeführten Worte sind darin beybehalten; und sonst nirgends angezeigt worden, woher der ihr (mit der nämlichen Ausdehnung wie in der ersten Ausgabe) beygefügte, auf die ähnliche Art wie in dem Magnus canon Rhætici zusammengeordnete Canon sinuum, tangentium & secantium genommen sey.

Ganz den nämlichen enthält Francisci Schoten Math. Prof. Lugd. Bat. Trigonometria triangulorum planorum cum sinuum, tangentium & secantium canone accuratissimo; Latine reddita a Joanne Magiro Germano (Bruxellis 1683.): welche holländisch 1627. zu Leiden herausgekommen ist (Kästners geom. Abhdl I Samml. S. 580.) Schooten sagt davon in der Einleitung p. 6. sq.: Inutiles autem hæ nostræ tabulæ forsan videbuntur, cum & illæ jam a multis nostris antecessoribus editæ sint. Sed cum ego nondum inciderim in aliquas, nisi quæ multis mendis refertæ & imperfectæ fuerint; multum autem referat, has tabulas quam correctissimas esse — ego illas mendis, quibus scatebant, magno certe labore per differentias suas corrigendo, in usum privatum purgavi, ita ut illas jam omnibus vacare vitiis certissime spondere possim. Quapropter amicorum precibus — hoc dedi, ut typis mandarentur quam correctissime. —

Cavalieri (Trigonometria. Bonon. 1643. Siehe S. 140. 154.), und Schulze (Sammlung logarithmischer — Tafeln. Berlin 1778. S. S. 51. f.) geben auf sieben Decimalstellen abgekürzte Tangenten und Secanten aus dem erst erwähnten Canon von Rhäticus; dieser mit vorausgeschikter Bemerkung in der Einleitung zum zweyten Bande (S. 2.): „Ich finde nöthig hier zu erinnern, daß bey den Cotangenten und Cosecanten des ersten Grads von 0 bis 10 Min. die drey letzten Ziffern unzuverlässig sind; von 10 bis 20 Min. sind es nur die zwo letzten; von 10 bis 30 Min ist es nur allein noch die letzte Ziffer; nachher ist alles genau. Ich habe dieselben aus dem Opere Palatino

de triangulis — genommeu, wo sie bis auf viele mehrere Decimalen berechnet angetroffen werden. Der Fehler rührt nach der Bemerkung des Hrn. Wolfram daher, weil diese Linien durch die sechs ersten Ziffern des Sinus sind bestimmt worden. Ich habe für unnöthig gehalten, diese Fehler zu verbessern, weil man sehr selten die letzten Decimalstellen gebraucht; indessen habe ich es hier anzeigen wollen, damit man sich nicht darauf verlasse, wenn man sie irgend gebrauchen möchte."

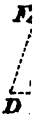
Von diesen Fehlern und derselben Verbesserung giebt ein Auszug aus der Notice des travaux de la Classe des sc. math. & phys. de l'Institut national par Delambre in der Gazette nationale, 8 Thermidor, An 9. folgende Nachricht: A l'occasion des grandes Tables trigonometriques — Prony — a lu à la Classe un Memoire sur l'Opus Palatinum de triangulis de Rheticus. Ces Tables, les plus complettes qui aient paru sur les lignes trigonometriques en nombres naturels, n'avoient pas été soignées dans toutes leurs parties avec le meme scrupule. On avoit bientot reconnu, que les tangentes & les secantes des derniers degrés avoient besoin de corrections considerables; on savoit vaguement, que ces corrections avoient été ordonnées: mais on n'etoit pas sur, qu'elles eussent été executées; du moins on n'en trouvoit aucune trace dans quatre exemplaires, les seuls qu'on connut à Paris de cet ouvrage extremement rare. Schulze dans ses Tables imprimées à Berlin en 1778. avoit copié toutes les fautes de Rheticus, & s'etoit contenté d'en averitir dans sa Preface; ce qui paroissoit supposer l'impossibilité de trouver un exemplaire correct de l'Opus Palatinum. Prony eut le bonheur d'en rencontrer un, dans lequel les tangentes & les secantes des derniers degrés sont de la meme exactitude que tout le reste. Le titre du Livre est augmenté de ces mots: recens emendatus a Barthol. Pitisco Silesio &c. [Vergl. Kästners geom. Abh. I Samml. S. 569. f. 573. ff. Gesch. d. Math. I B. S. 612. ff. 616. 625. f.] Les sept der-

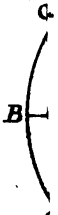
niers degrés ont été calculés de nouveau; & ils ont necessité la reimpression de 86 pages, qui se reconnoissent à quelques differences dans le papier & les caracteres; ceuxci etant plus usés, celui là moins beau que dans le reste du volume. Le Memoire de Prony contient les formules necessaires pour fixer la quantité des erreurs; et en outre des tables de comparaison, qui prouvent, à quel point sont exactes les corrections de Pitiscus. — Les Tables de Sherwin, Ozanam, Deparcieux, & plus anciennement celles de Phil. Lansberg ont été imprimées d'aprés un exemplaire corrigé. — Mais de tous ces auteurs, qui ont donné les tangentes et les secantes exactes, Lansberg est le seul, qui ait mis partout sept decimales. —

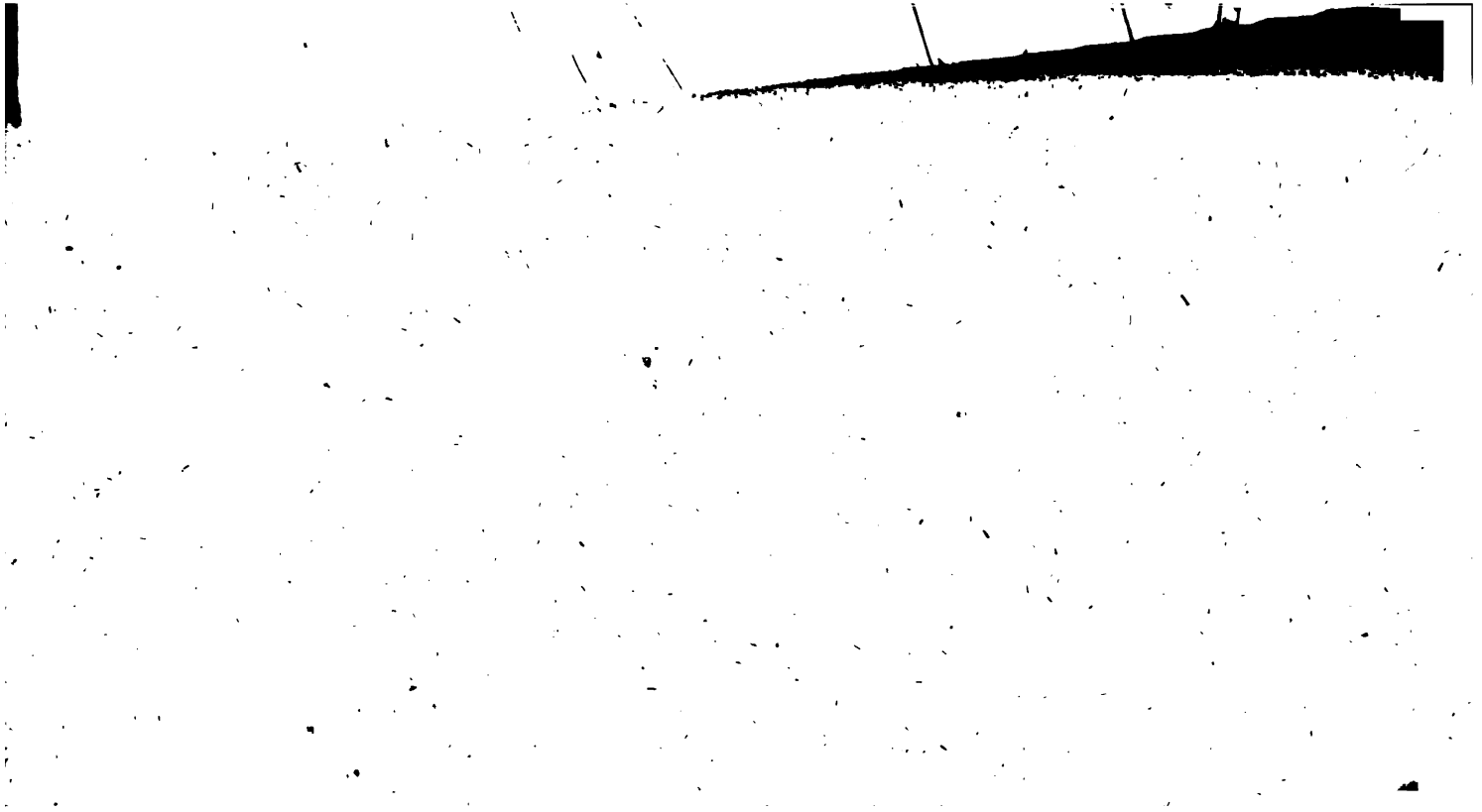
Zu S. 156. §. 71. Note a. Tables trigonometriques decimales, ou Tables des logarithmes des sinus, secantes & tangentes suivant la division du quart de cercle en 100 degrés, du degré en 100 minutes, & de la minute en 100 secondes; precedées de la table des logarithmes des nombres depuis dix mille jusqu'à cent mille, & de plusieurs tables subsidiaires; calculées par Ch. Borda; revues, augmentées & publiées par J. B. J. Delambre. A Paris, de l'imprimerie de la Republique. An IX. (Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde. Herausgegeben von Freyherrn F. von Zach. August 1801. S. 109. f.)

S. 159. Z. 24. von oben lese man 1627. statt 1727.
163. 6. Bressius statt Brescius
171. 3. von unten BAC statt ACB
187. 2. von oben LM statt CM
208. 19. sec. B statt sin. B
211. 2. AE statt AC
239. 11. von unten setze man hinzu: Es seyen CD = 800 Fuß
255. 6. von oben lese man Dreyeken statt Dreyen
278. setze man oben §. 120. über Berechnung
309. 8. von unten lese man Vielek statt Vierek.

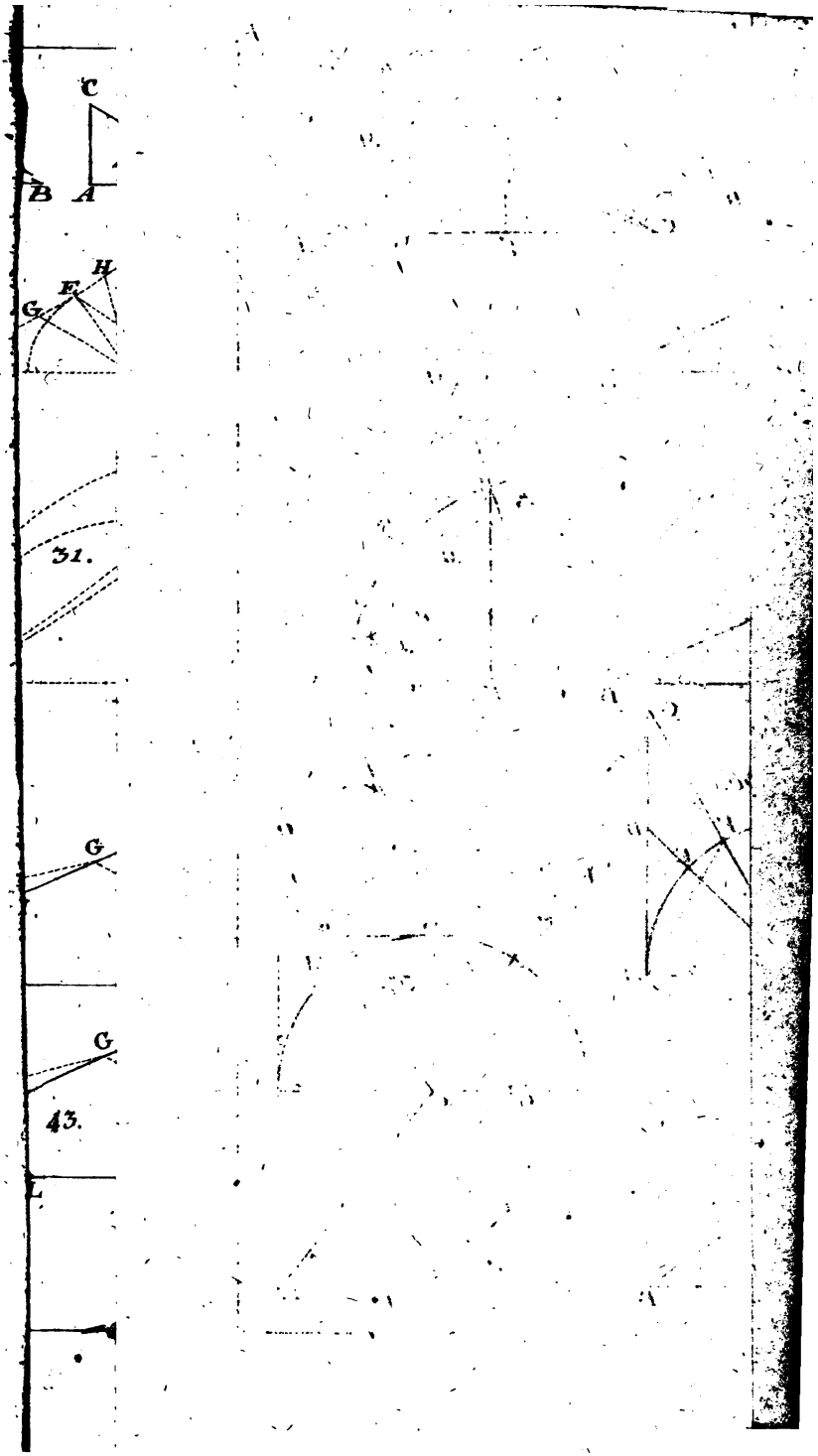
h
l

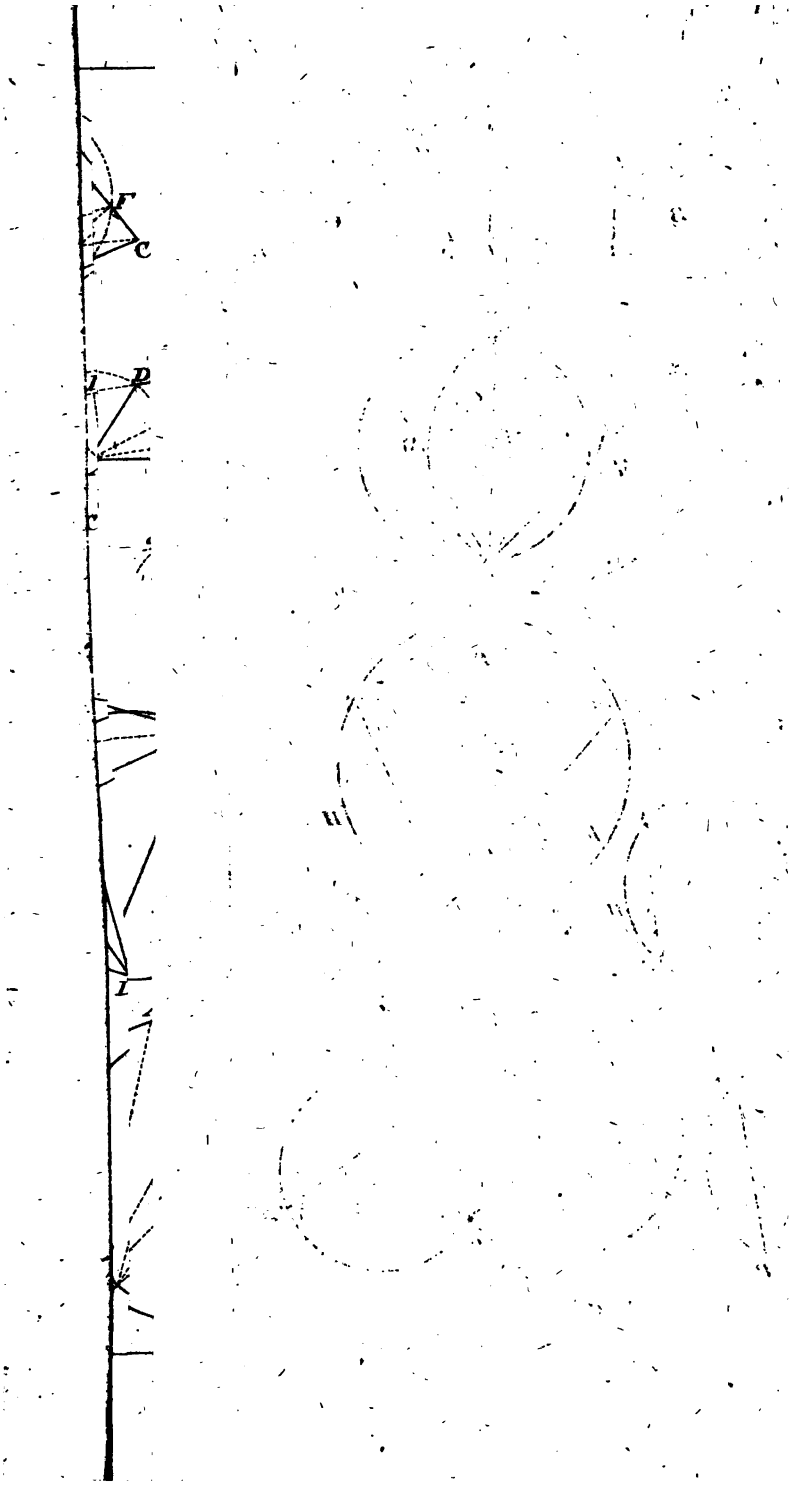

E
D


C
B
A



31.
G
G
43.
L


C
B
A
H
E
G
31.
G
G
43.
L


F
C
D
I

D
K
N
C